پودمان ۳

معادله‌های درجهٔ دوم

مفهوم معادله های درجهٔ دوم

مادر زهرا از کارآفرینان نمونهٔ کشور است. او یک کارگاه تولید صنایع دستی دارد که افراد زیادی در آنجا مشغول به‌کارند. برای تأمین هزینه‌ها، لازم است که این کارگاه سه میلیون تومان درآمد ماهیانه داشته باشد. مادر زهرا برای کسب درآمد مورد نظر باید بداند چه تعداد کالا تولید شود و به فروش برسد. او برای یافتن جواب این سؤال‌ها، نظر مشاور مالی کارگاه را جویا می‌شود.

مشاور می‌گوید: برای افزایش درآمد می‌توان قیمت کالا را افزایش داد اما با این کار، ممکن است تعداد مشتری‌ها کم و درآمد کمتر شود. یک راه دیگر، افزایش تولیدات است ولی ممکن است همهٔ تولیدات به فروش نرسند و مجبور شویم قیمت را پایین بیاوریم. به این ترتیب، ممکن است درآمد باز هم کمتر شود. باید حساب شده عمل کنیم و رابطهٔ بین تعداد کالای تولید شده و سود به دست آمده را به طور دقیق حساب کنیم.

با بررسی آمار فروش دوره‌های گذشته، می‌توان رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای به فروش رفته را پیدا کرد. بر اساس این اطلاعات، اگر قیمت کالا را با p نشان دهیم و x تعداد کالای فروش رفته با این قیمت باشد، رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$ به طور تقریبی بین آنها برقرار است.

فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

$$۳۰۰p = ۶۰۰۰۰ - x \quad \Rightarrow p = \frac{۶۰۰۰۰ - x}{۳۰۰}$$

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با $R = x.p$ نشان می‌دهند. معادلهٔ درآمد را بر حسب x، بنویسید.

$$R = p \times x = \frac{۶۰۰۰۰ - x}{۳۰۰} \times x = \frac{(۶۰۰۰۰ - x) \times x}{۳۰۰} = \frac{۶۰۰۰۰x - x^{۲}}{۳۰۰}$$

۳) چند جمله‌ایِ درآمد بر حسبِ x از درجهٔ چند است؟

$$R = \frac{۶۰۰۰۰x - x^{۲}}{۳۰۰}$$

درجه دو چون بزرگترین توان X دو می‌باشد

۴) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

$$۳۰۰۰۰۰۰ = \frac{۶۰۰۰۰x - x^{۲}}{۳۰۰} \Rightarrow ۳۰۰۰۰۰۰ \times ۳۰۰ = ۶۰۰۰۰x - x^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۶۰۰۰۰x + ۹۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

تعریف

معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند و $a\neq ۰$، معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

مقدارهایی برای x که به ازای آنها تساوی برقرار می‌شود، جواب‌های معادله نامیده می‌شوند.

مثال ۱

کدام یک از معادله‌های زیر، معادلهٔ درجهٔ دوم هستند؟

الف) $(۳x-۱)(x+۲)=۶$

معادلهٔ (الف) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$۳x^۲+۶x-x-۲-۶=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۵x-۸=۰$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم است.

ب) $(۲x+۱)(x-۱)=۲x^۲+۳$

معادلهٔ (ب) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$۲x^۲-۲x+x-۱=۲x^۲+۳ \Rightarrow -x-۴=۰$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ اول است.

مثال ۲

زمینی مستطیل شکل به مساحت ۶۰۰ مترمربع را با ۱۰۰ متر نرده محصور کرده‌ایم. طول و عرض زمین چقدر است؟

اگر طول و عرض این زمین بر حسب متر x و y در نظر گرفته شود،

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = ۶۰۰$$

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۱۰۰ \quad \Rightarrow x+y = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰ \quad \Rightarrow y = ۵۰ - x$$

$$xy = ۶۰۰ \Rightarrow x(۵۰ - x) = ۶۰۰ \Rightarrow ۵۰x - x^{۲} = ۶۰۰ \Rightarrow x^{۲} - ۵۰x + ۶۰۰ = ۰$$

کار درکلاس ۱

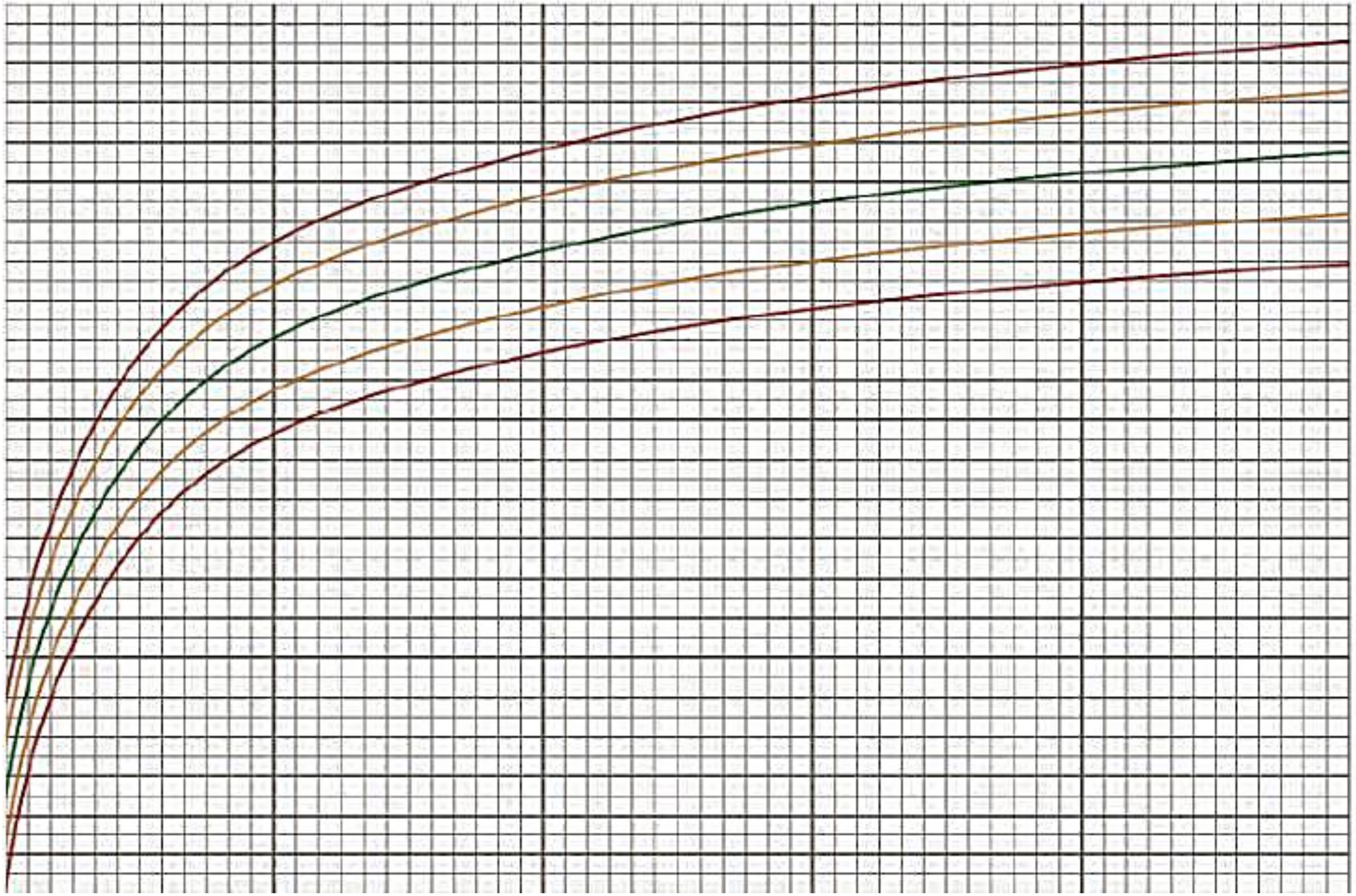
در مثال ۲، از معادلهٔ $۲(x+y)=۱۰۰$، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

$$۲(x+y)=۱۰۰ \Rightarrow x+y=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰ \Rightarrow x=۵۰-y$$

$$xy=۶۰۰ \Rightarrow (۵۰-y)y=۶۰۰ \Rightarrow ۵۰y-y^{۲}=۶۰۰ \Rightarrow y^{۲}-۵۰y+۶۰۰=۰$$

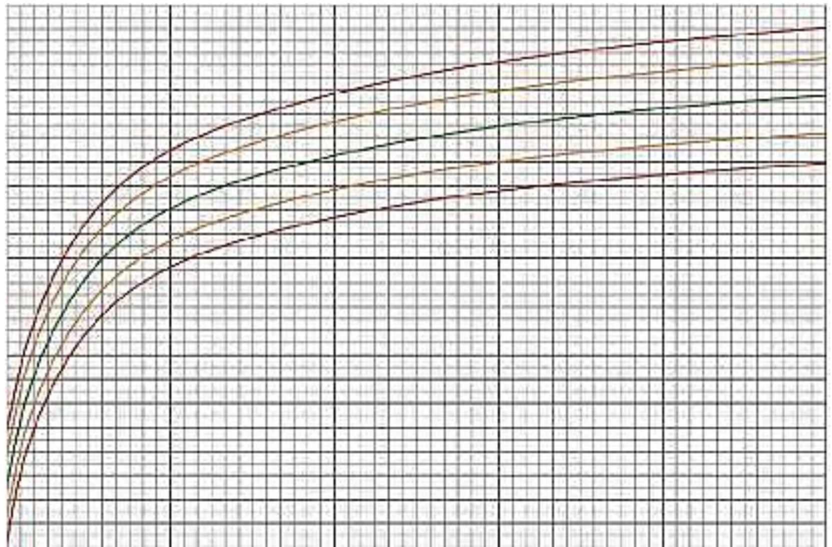
ضرایب به دست آمده در هر دو معادله یکسان است و فقط نام متغیر عوض شده است

رابطه‌های غیر خطی



در فصل‌های قبل، در مورد رابطهٔ بین کمیت‌های متناسب بسیار کار کرده‌اید. در حالتی که دو کمیت به‌طور مستقیم با یکدیگر متناسب‌اند، مقدار هر کدام به صورت مضربی از مقدار دیگری است. در این حالت نمودار این‌گونه رابطه‌ها به صورت خط مستقیم است؛ به همین دلیل، این رابطه‌ها از نوع **رابطه‌های خطی** هستند.

در طبیعت، بسیاری از رابطه‌ها به‌صورت خطی نیستند. برای مثال، طول قد انسان‌ها با سن آنها رابطه دارد. آیا این رابطه یک رابطهٔ خطی است؟ اگر این رابطه، یک رابطهٔ خطی بود، تصور کنید طول قد انسان‌های سالمند چقدر می‌شد؟ می‌دانید که بعد از تولد، طول قد انسان افزایش پیدا می‌کند ولی میزان این افزایش در بازه‌های زمانی ثابت نیست و تقریباً بعد از بیست و دو سالگی، طول قد انسان ثابت می‌ماند. نمودار این رابطه برای یک فرد مانند شکل زیر است.



فعالیت ۲ رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید.

طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

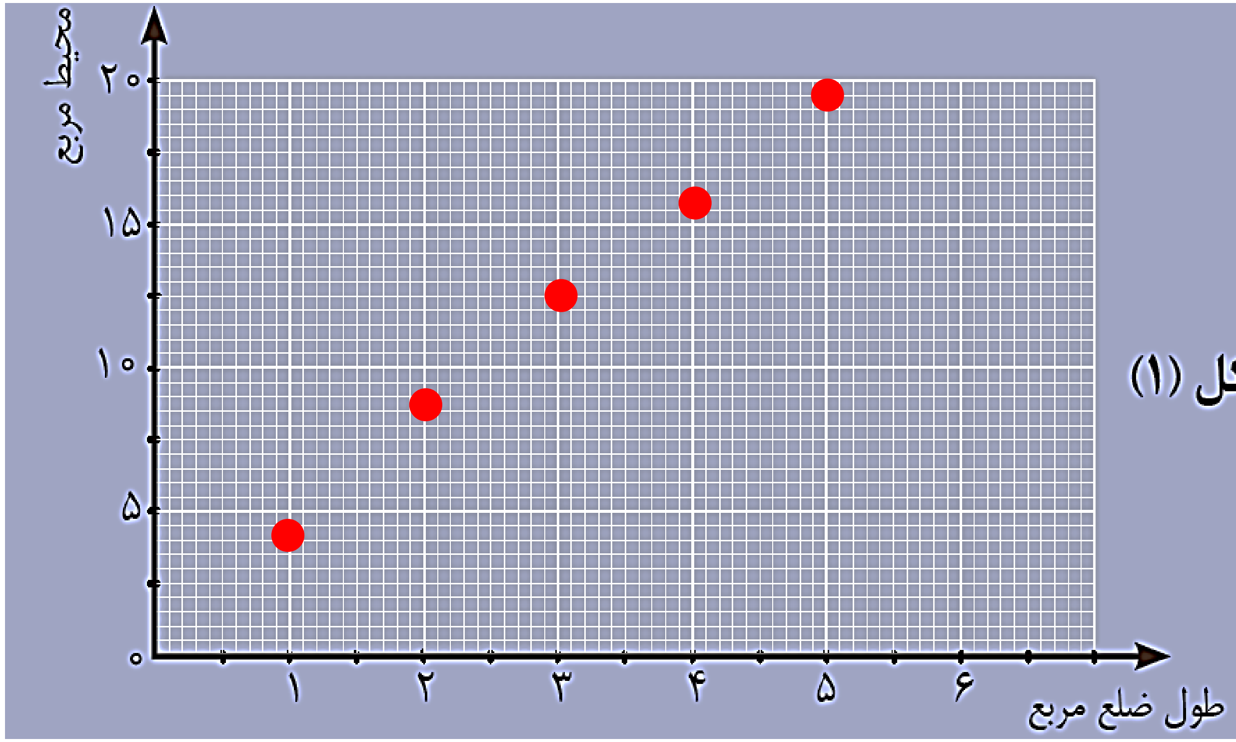
۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

مساحت $S = x^۲$ محیط $P = ۴x$

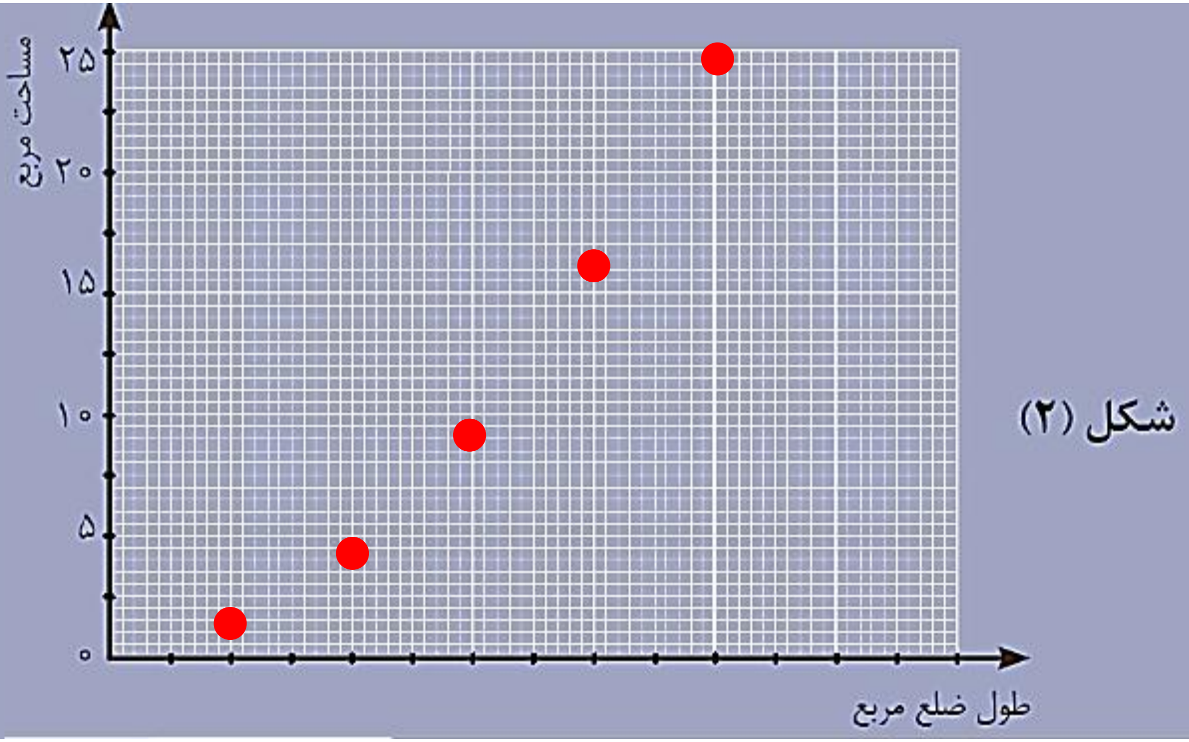
۲) جدول زیر را کامل کنید.

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)					
S (مساحت مربع)					

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.



شکل (۱)



شکل (۲)

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
S (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
S (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

x(طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط				
میزان افزایش مساحت				

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

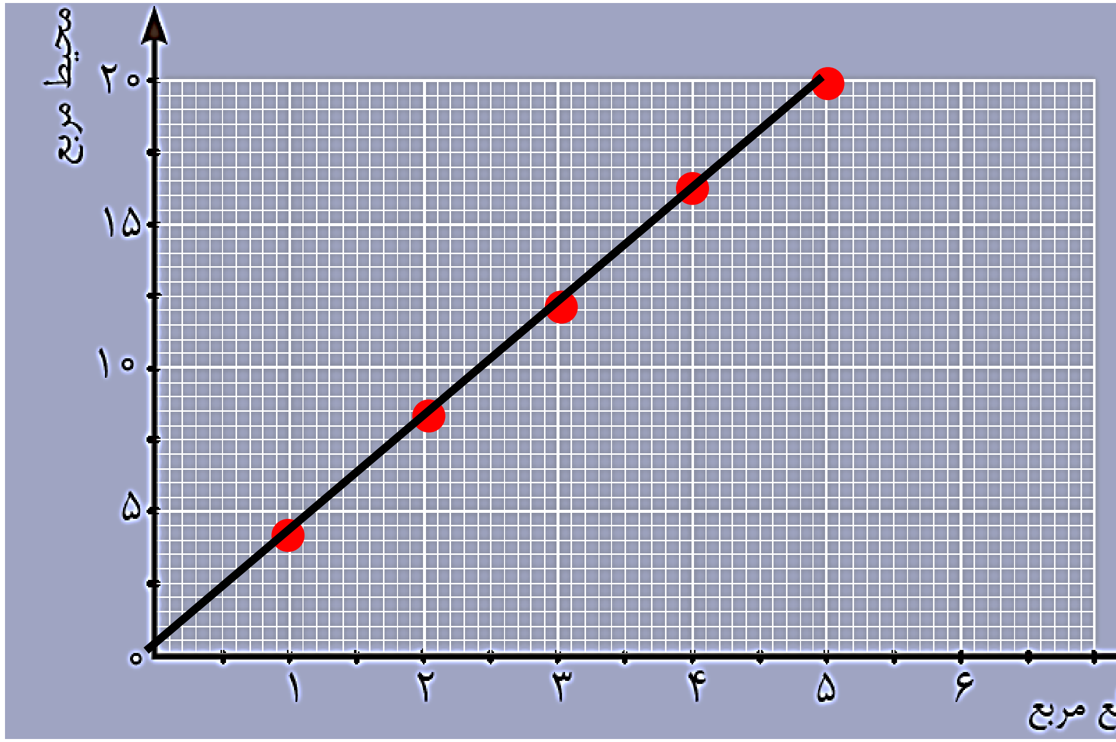
بله

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

خیر

x(طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط	۴	۴	۴	۴
میزان افزایش مساحت	۳	۵	۷	۹

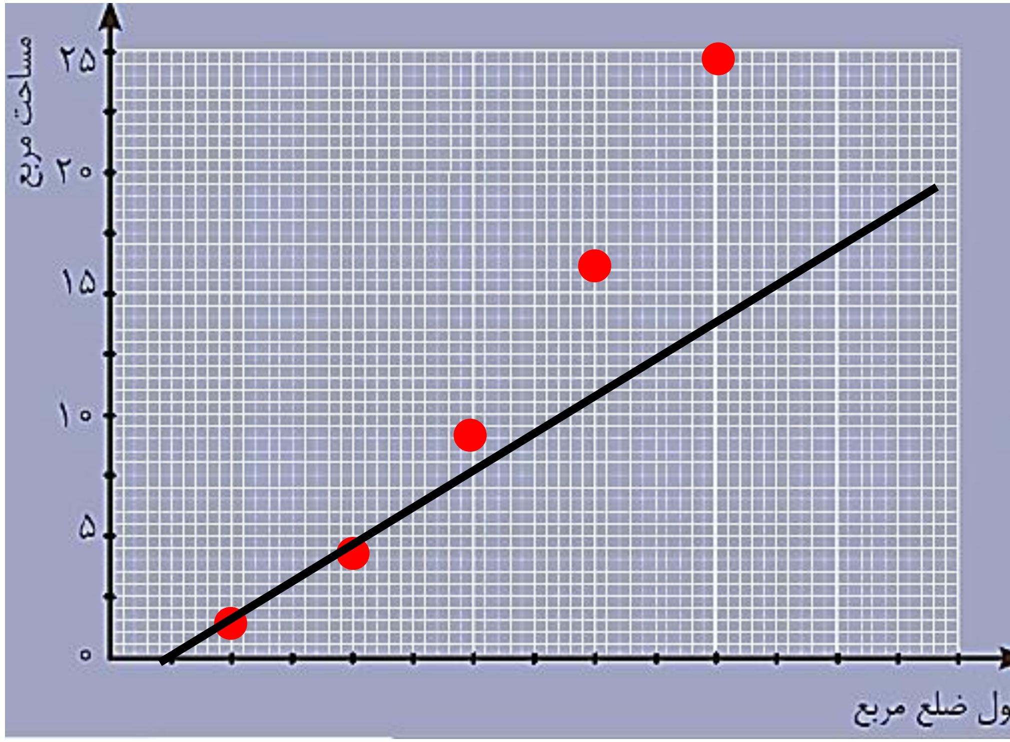
۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟



شکل (۱)

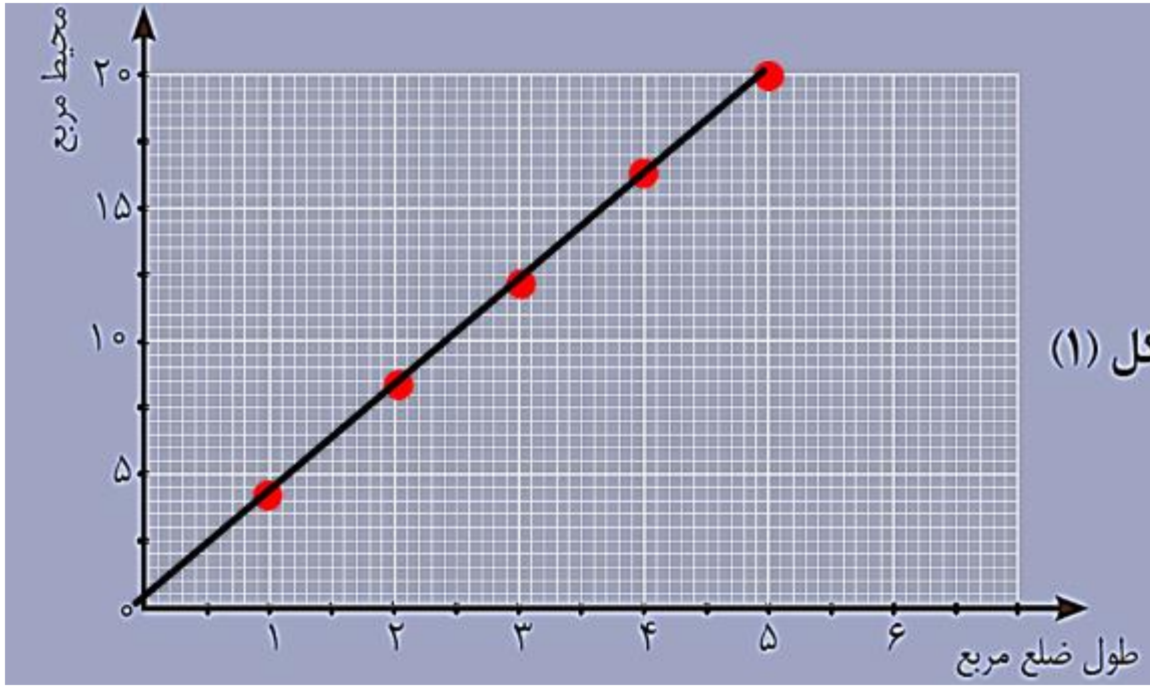
بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

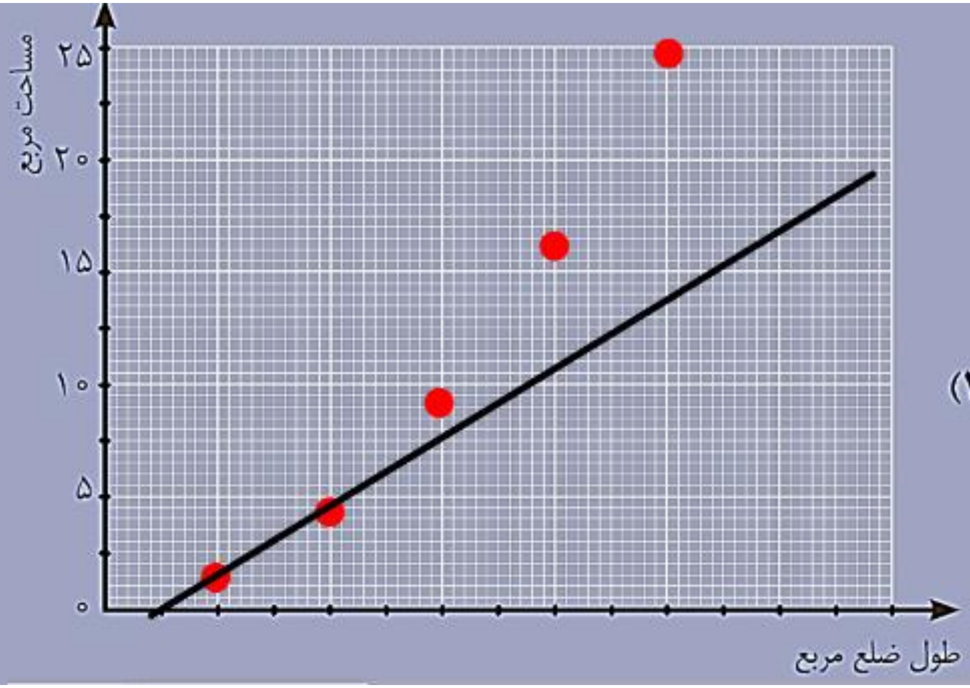


شکل (۲)

خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.



شکل (۱)



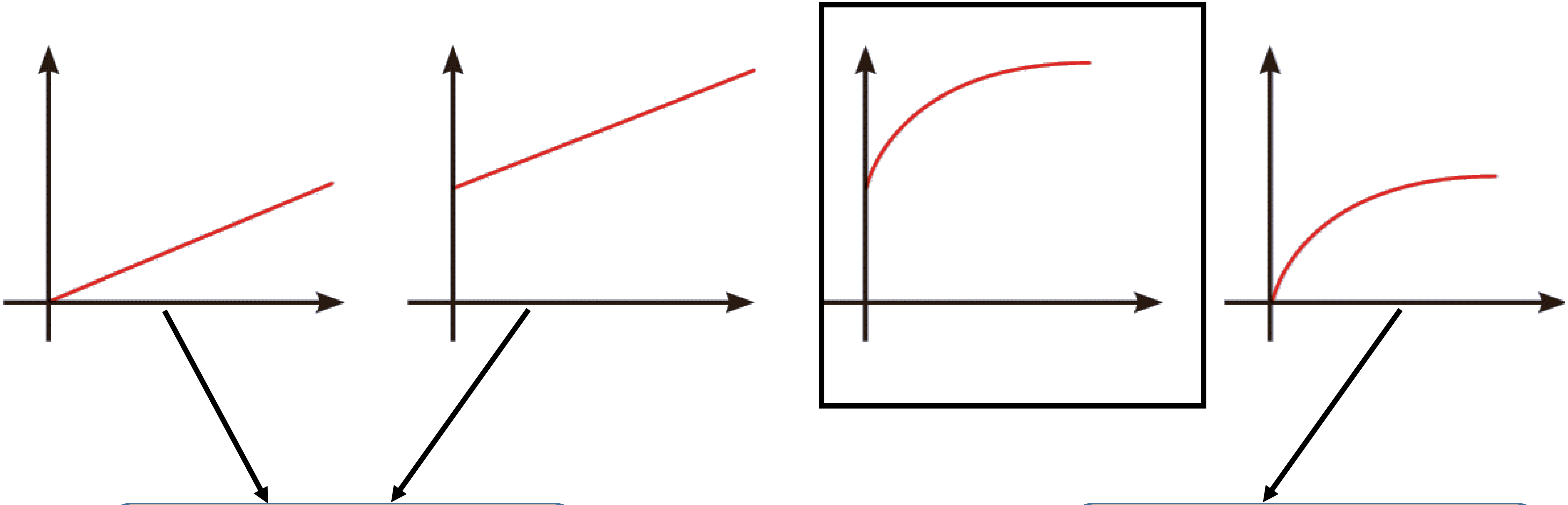
شکل (۲)

فعالیت بالا نشان می‌دهد که نمودار رابطهٔ بین طول ضلع مربع و محیط آن به صورت خط راست است. در این حالت، نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقداری ثابت است و این دو مقدار باهم رابطهٔ خطی دارند. ولی نسبت افزایش مساحت مربع به طول ضلع آن، مقدار ثابتی نیست. به همین

دلیل، نمودار رابطهٔ طول ضلع مربع و مساحت آن به صورت خط راست نیست و رابطهٔ بین طول ضلع مربع و مساحت آن را **غیرخطی** می‌نامند.

کار در کلاس ۲

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



این دو نمودار اشتباه است زیرا رابطهٔ وزن انسان و زمان خطی نیست،

این نمودار اشتباه است زیرا وزن انسان در هنگام تولد صفر نیست

کاردرکلاس ۳ یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن ($x^۲$) را با y نشان دهید.

۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

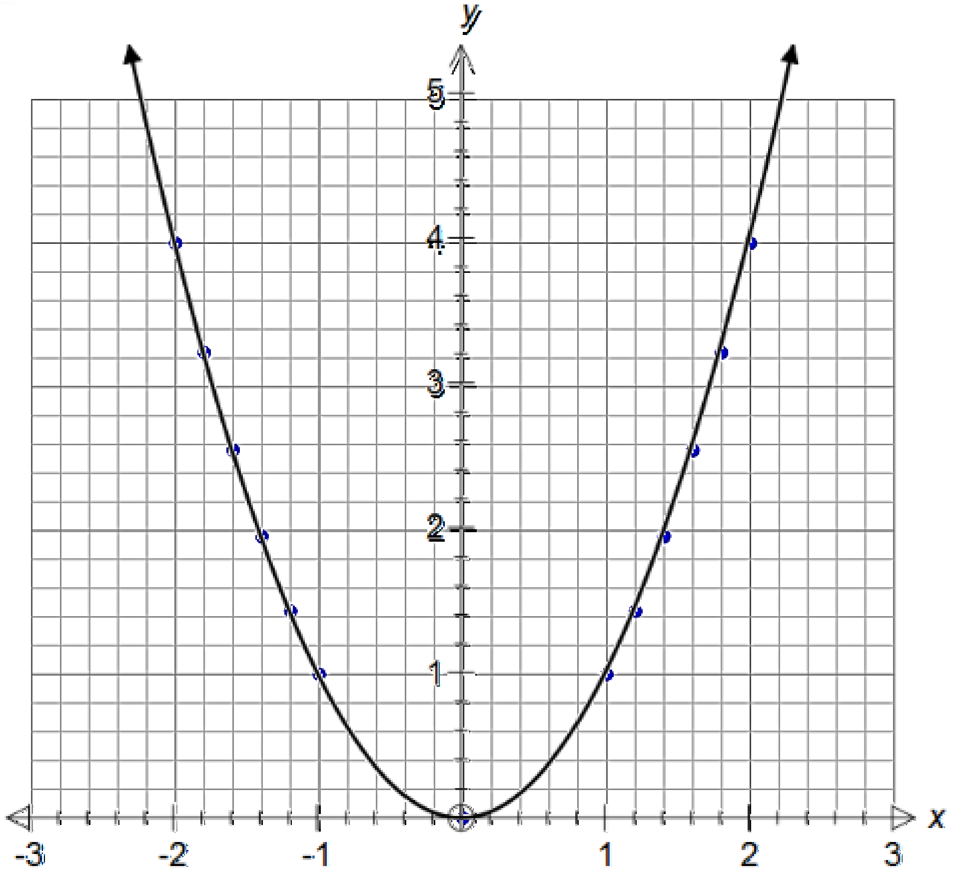
$$y = x^۲$$

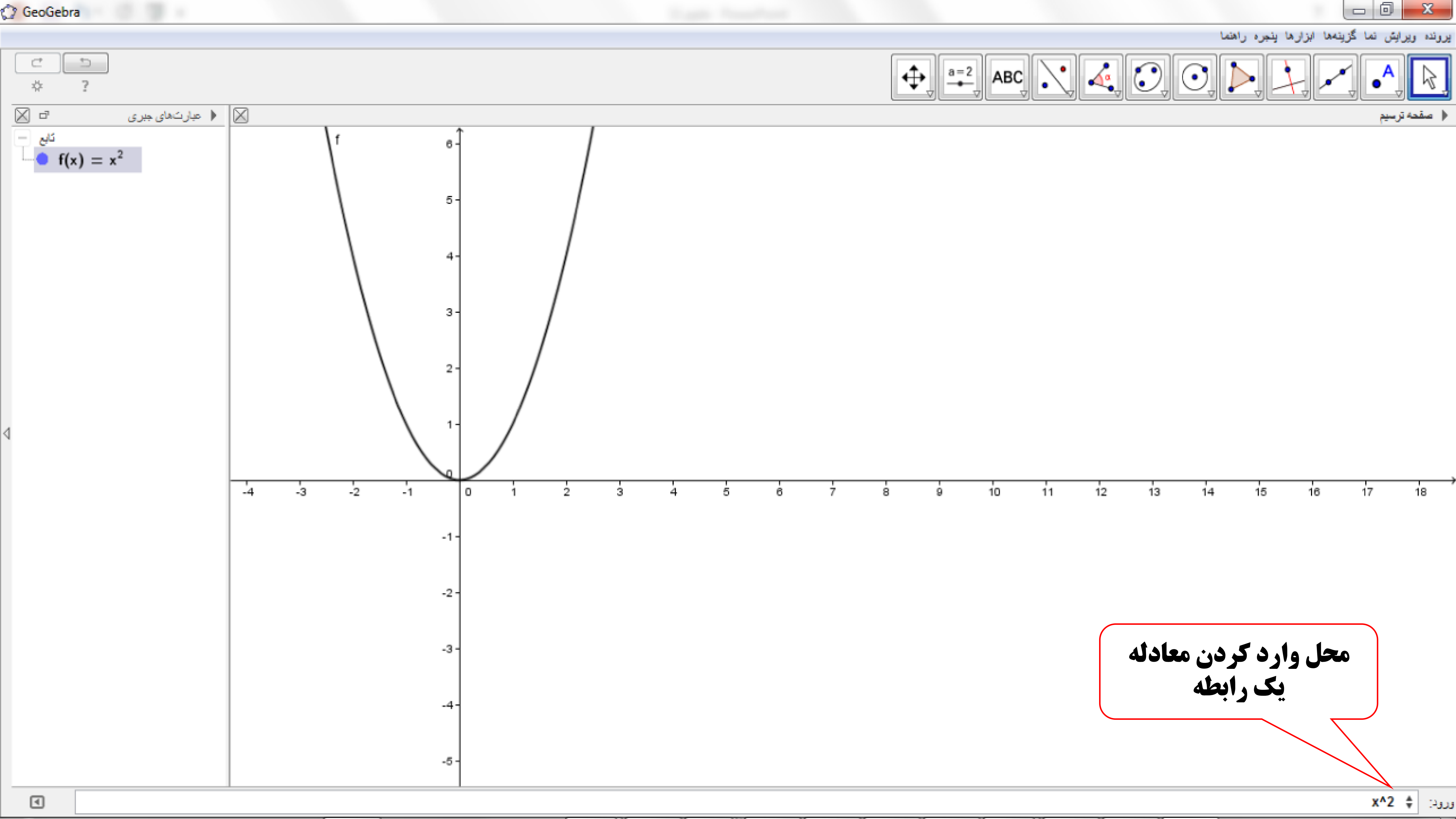
۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y									۱/۴۴				

۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ را رسم کنید.

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	۴	۳/۲۴	۲/۵۶	۱/۹۶	۱/۴۴	۱	۰	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴




GeoGebra
پرونده ویرایش نما گزینه‌ها ابزارها پنجره راهنما
ABC
a = 2
عبارت‌های جبری
تابع
f(x) = x²
صفحه ترسیم
f
محل وارد کردن معادله یک رابطه
ورود:
x^2

مفهوم نقاط برخورد دو نمودار

فعالیت ۳ هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)							
درآمد حاصل از فروش (تومان)							

هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشد، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

هزینهٔ تولید x کالا برای فروش $= C = y_1 = 170000 + 60x$

درآمد حاصل از فروش x کالا $= R = y_2 = 400x$

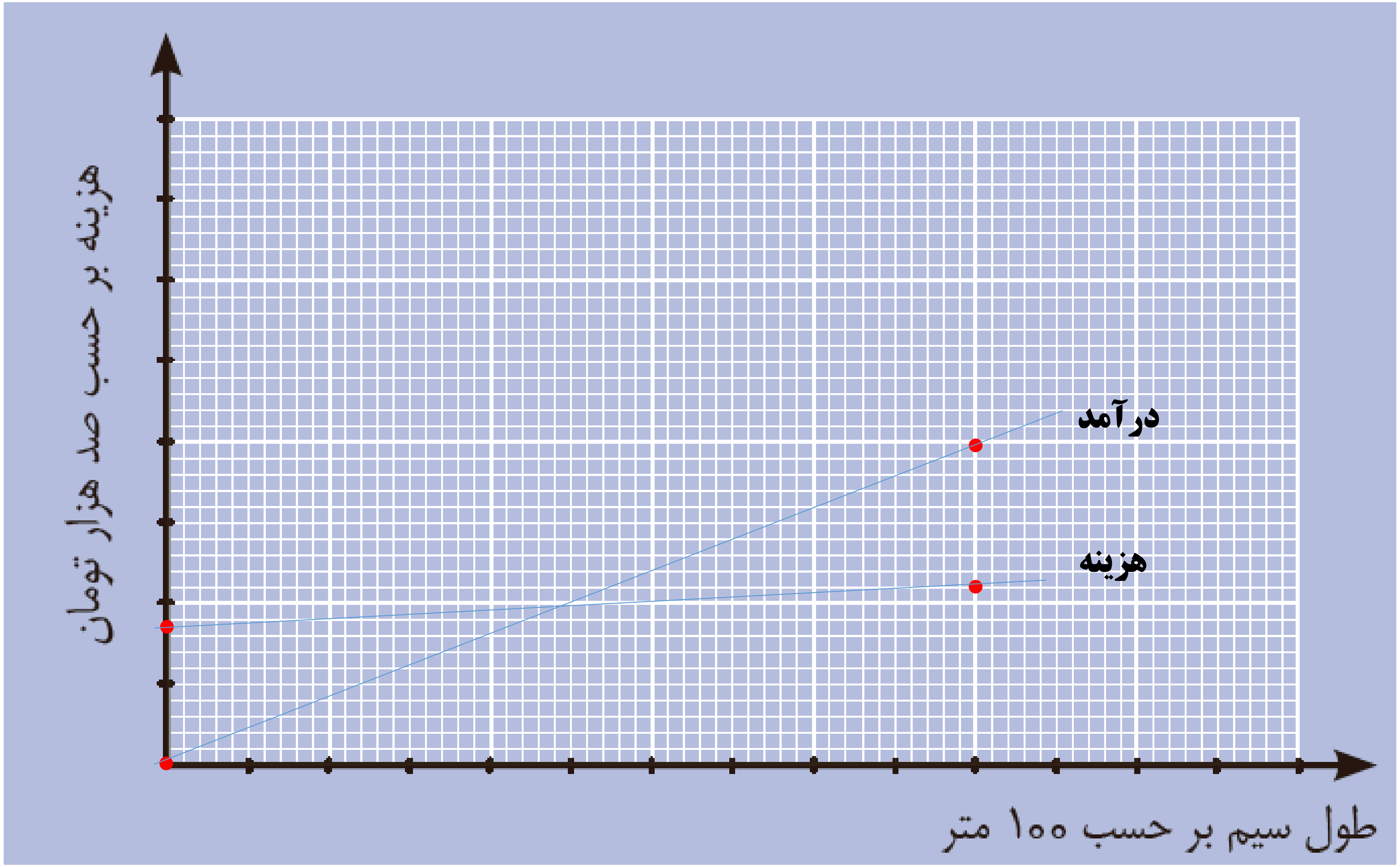
۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).

برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که y بر حسب تومان است و می‌خواهیم Y جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم: $y = 100000Y$ و چون x بر حسب متر است و می‌خواهیم x جدید برحسب ۱۰۰ متر باشد داریم $x=100X$. با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

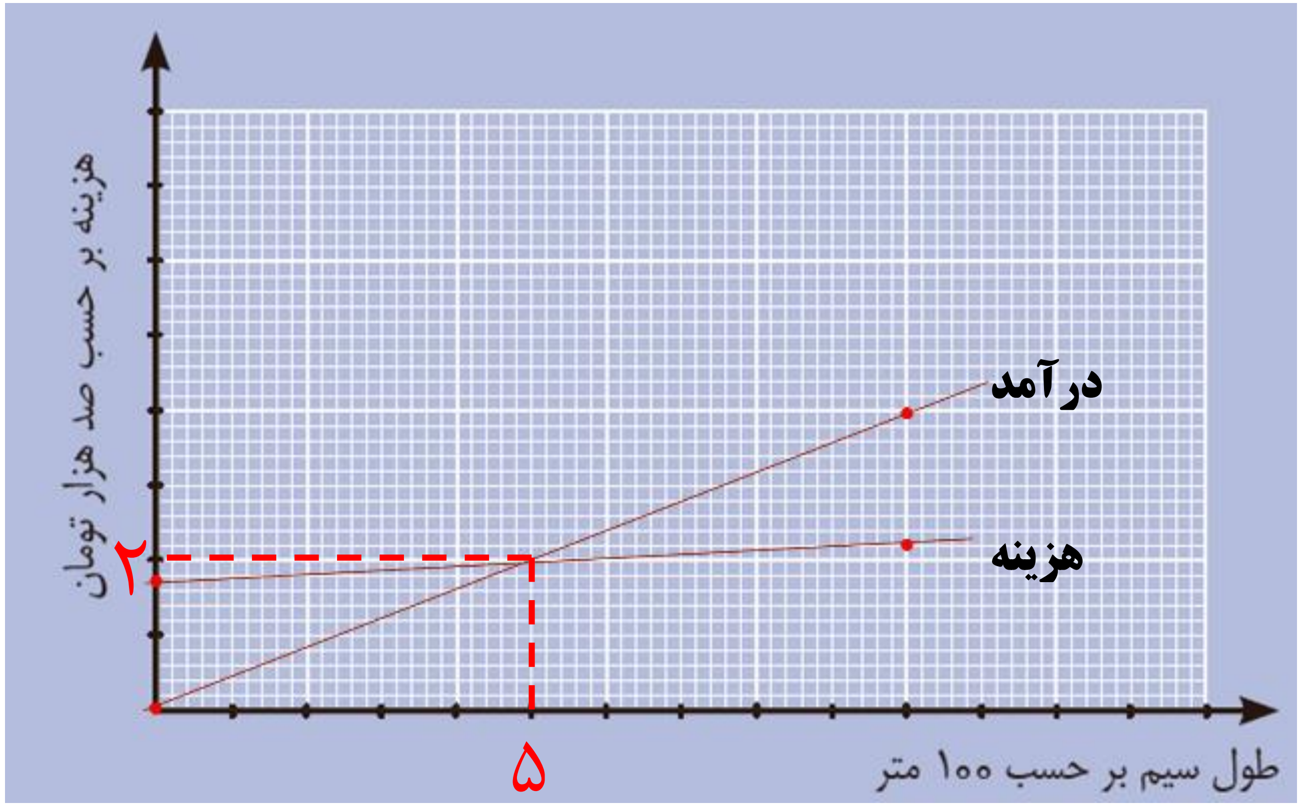
$$100000Y_1 = 170000 + 60 \times 100X \Rightarrow Y_1 = 1/7 + 0/06X$$

$$100000Y_2 = 400 \times 100X \Rightarrow Y_2 = 0/4X$$

$$Y_{۱} = ۱/۷ + ۰/۰۶X \qquad Y_{۲} = ۰/۴X$$

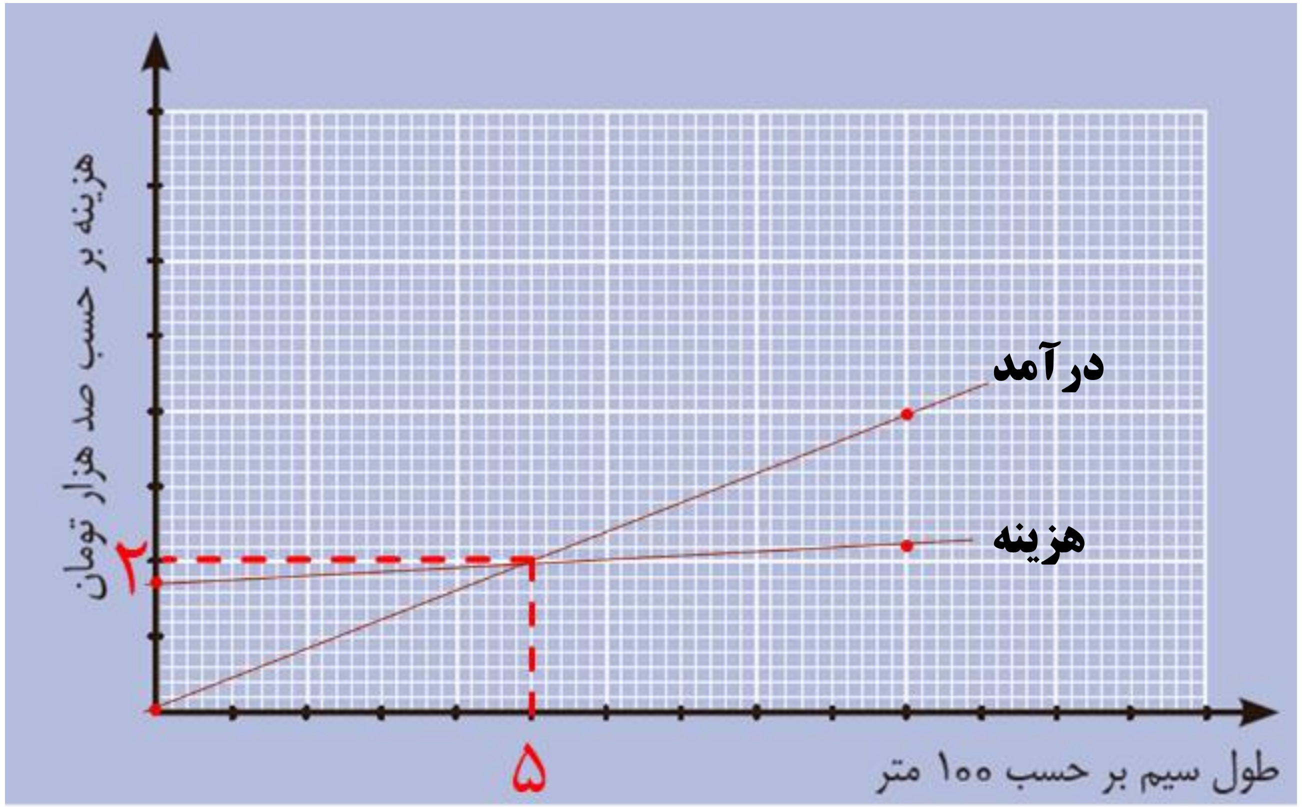


۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.



نقطهٔ برخورد $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$

۵) نقطهٔ برخورد این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟



یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینهٔ تولید و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می گیرد کارگاه شروع به سوددهی می کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق[1] کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

چنین نقطه ای روی نمودار هر دو معادله است، یعنی نقطهٔ برخورد نمودار این دو معادله است.

محل برخورد دو خط، نقطه ای است که اگر مختصات آن را در معادله‌های هر دو خط قرار دهیم، تساوی برقرار می شود.

برعکس، اگر مختصات نقطه ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه همان محل برخورد دو خط است.

کار در کلاس ۴

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)					
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)					

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

$$R = ۳۰۰۰۰x \quad , \quad C = ۳۲۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰x$$

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه را نشان دهد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید[1].

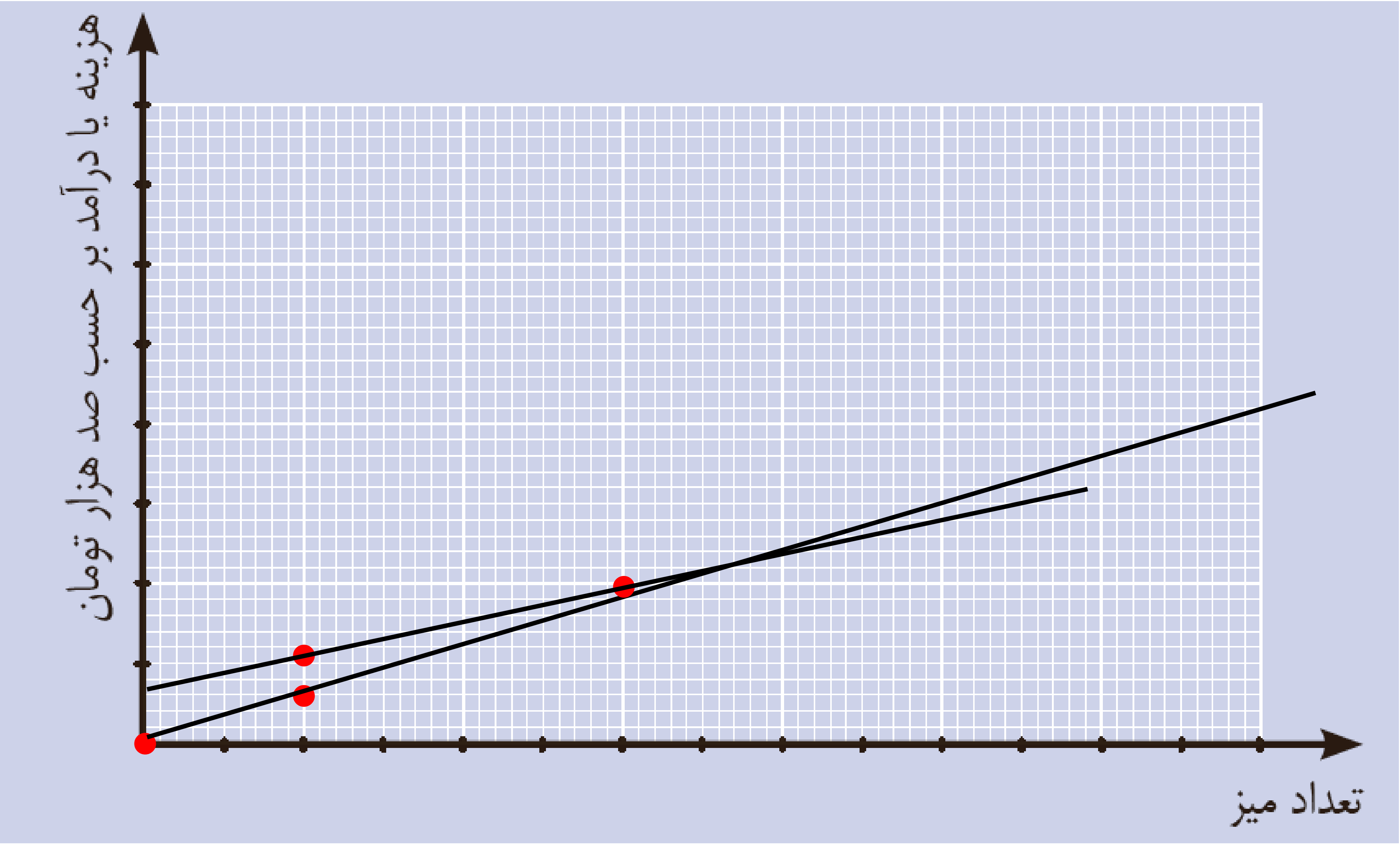
$$R = ۳۰۰۰۰x \quad , \quad C = ۳۲۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰x$$

تبدیل واحد به

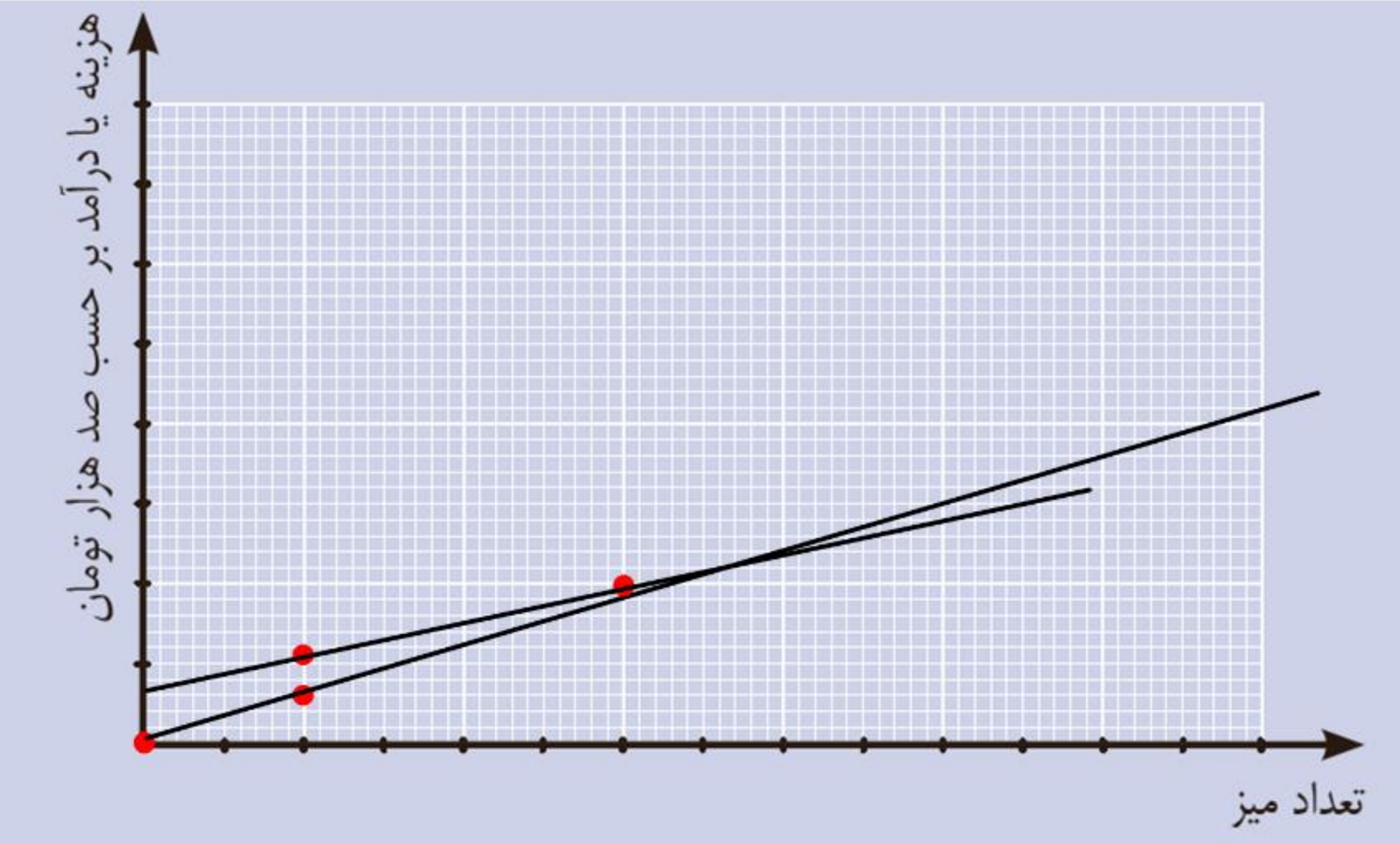
۱۰۰/۰۰۰

$$R = ۰/۳x \quad , \quad C = ۳/۲ + ۰/۲x$$

$$R = ۰/۳x \quad , \quad C = ۳/۲ + ۰/۲x$$

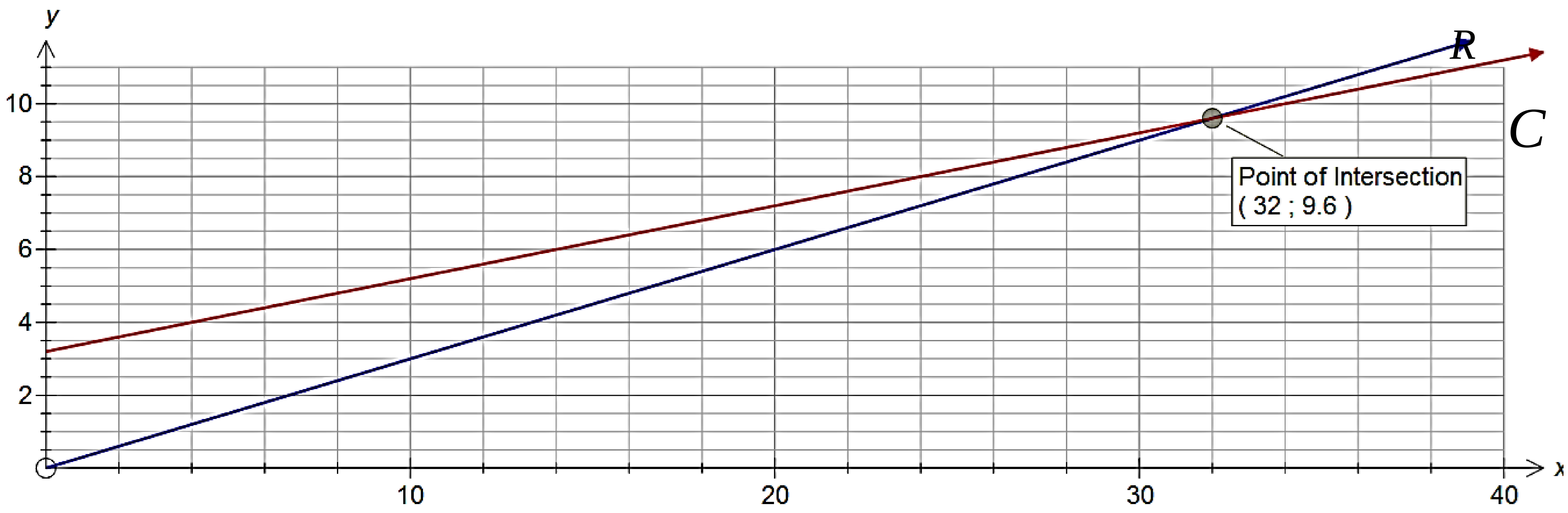


۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را به‌صورت تقریبی بیابید.



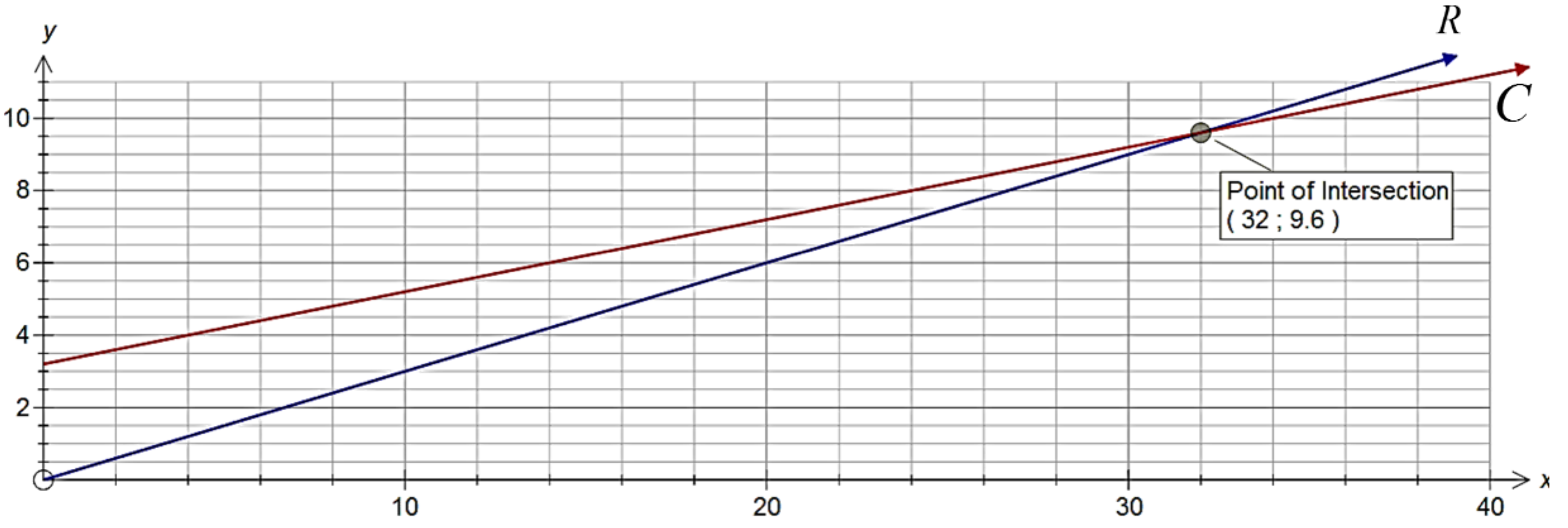
نقطهٔ برخورد $\approx \begin{bmatrix} ۳۲ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$

$$R = ۰/۳x \quad , \quad C = ۳/۲ + ۰/۲x$$



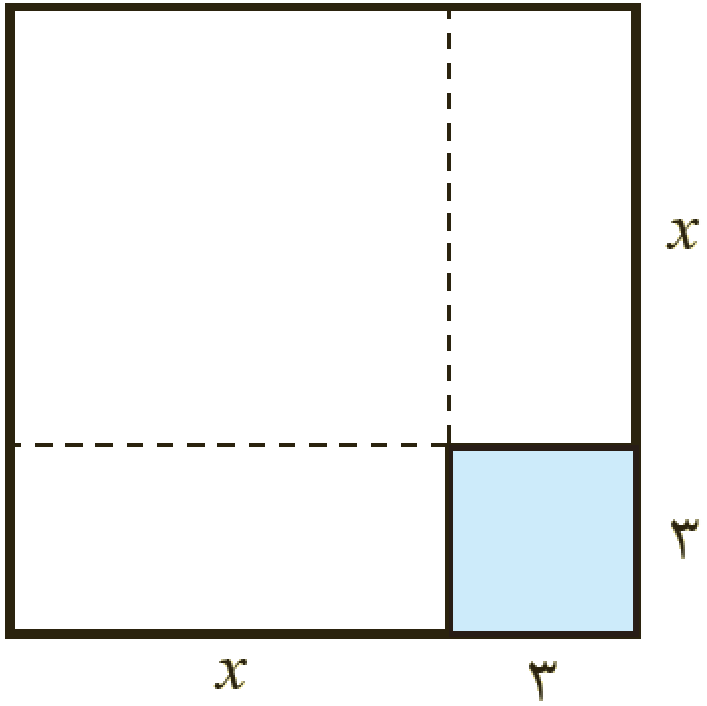
۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟



یعنی با تولید ۳۲ میز هزینهٔ کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.

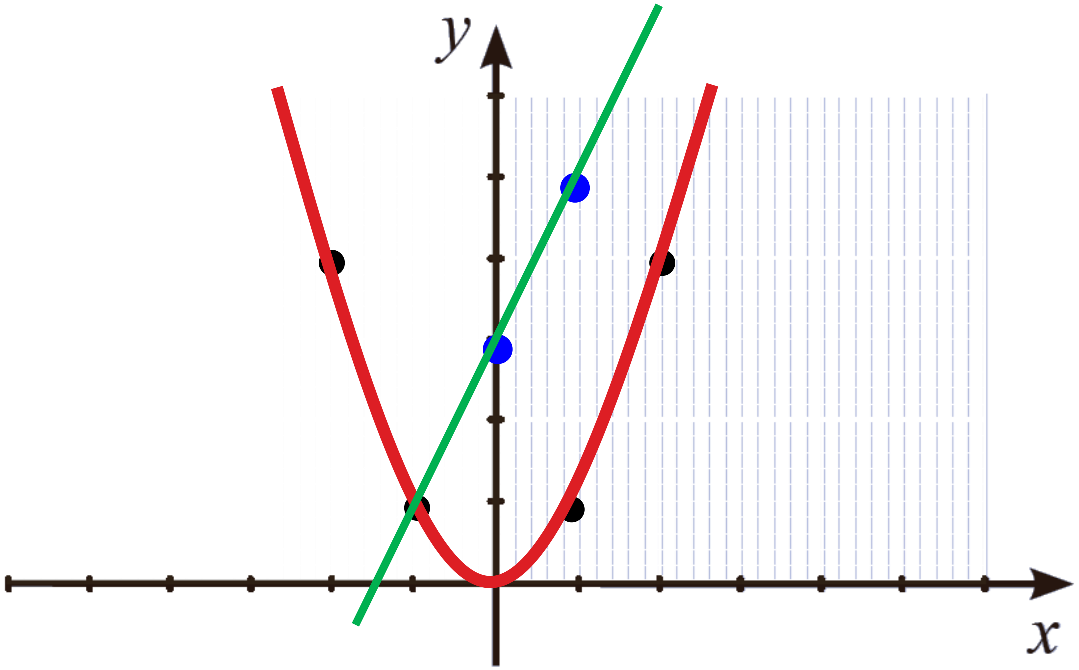
روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم



فعالیت ۴

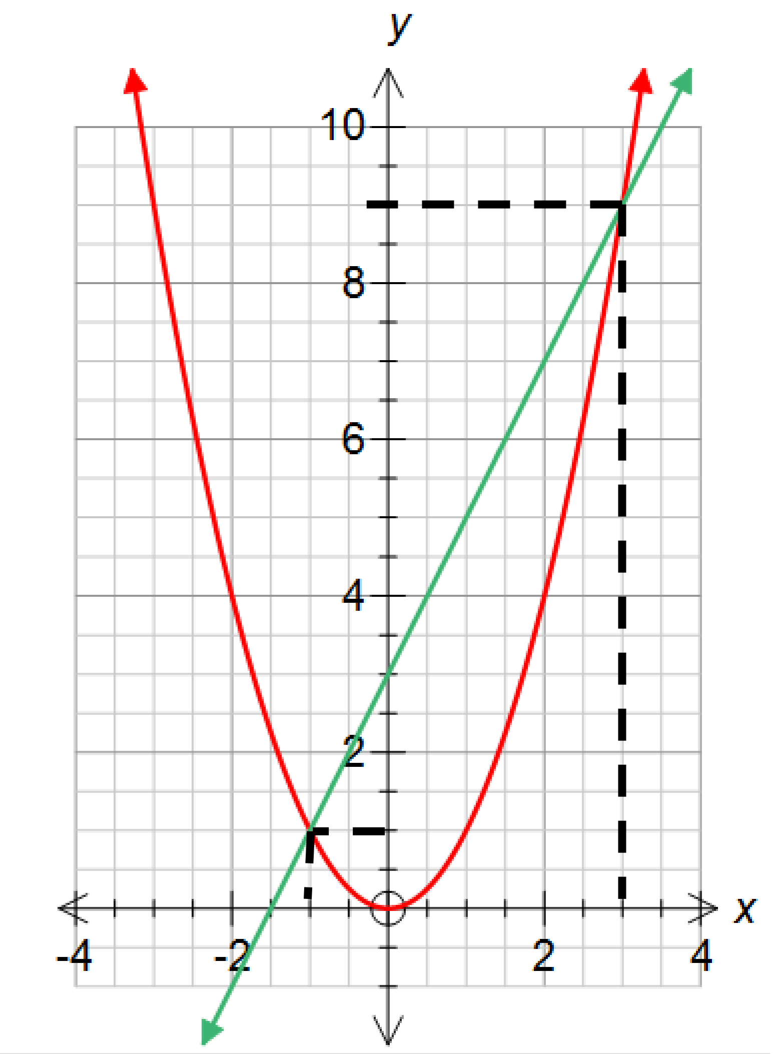
۱) دو رابطه $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

X	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$X^۲$						
۲X+۳						



۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.

۳) مختصات نقطهٔ برخورد این دو نمودار را بیابید.



$$\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می‌کنند؟

$y_۲=۲x+۳$ و $y_۱=x^۲$

$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

$۲(۳)+۳=۶+۳=۹$ $۳^۲=۹$

$۲(-۱)+۳=-۲+۳=۱$ $(-۱)^۲=۱$

۵) آیا طول‌های نقاط برخورد منحنی $y_۱$ و خط $y_۲$ در معادلهٔ $x^۲ = ۲x + ۳$ صدق می‌کنند؟

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$(-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳ \Rightarrow ۱ = ۱$$

$$(۳)^۲ = ۲(۳) + ۳ \Rightarrow ۹ = ۹$$

فعالیت بالا نشان می‌دهد که طول‌های نقاط برخورد دو نمودار رابطه‌های $y_1=x^2$ و $y_2=2x+3$ جواب‌هایی برای معادلهٔ $x^2=2x+3$ هستند. برعکس، هر جوابی از این معادله، یک نقطهٔ برخورد نمودارهای $y_1=x^2$ و $y_2=2x+3$ را نشان می‌دهد. معادلهٔ $x^2=2x+3$ را می‌توان به صورت معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2x-3=0$ نوشت. ملاحظه می‌شود برای یافتن جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان از این شیوه کمک گرفت.

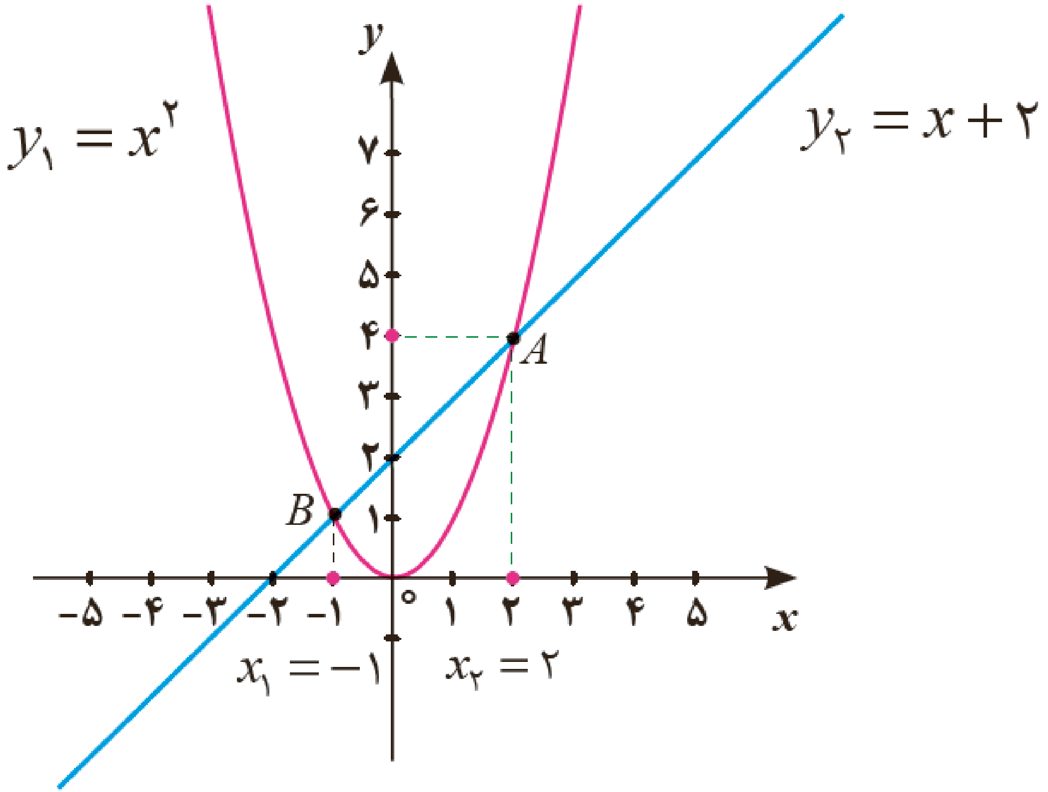
برای مثال، معادلهٔ $x^2-2x-3=0$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^2=2x+3$ می‌نویسیم. می‌توان گفت جواب‌های این معادله، مقدارهایی از x هستند که به ازای آنها، مقدارهای x^2 و $2x+3$ با هم برابر می‌شوند. با رسم نمودارهای $y_1=x^2$ و $y_2=2x+3$ و مشخص‌کردن نقطه برخورد این دو نمودار و تعیین طول نقاط برخورد می‌توان جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-3=0$ را به دست آورد. به کمک این روش، هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری را نیز می‌توانیم حل کنیم. این روش را **روش هندسی** حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌گویند.

مثال ۳

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-x-۲=۰$ را با روش هندسی حل کنید.

$$x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x^۲=x+۲ \Rightarrow \begin{cases} y_۱=x^۲ \\ y_۲=x+۲ \end{cases}$$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$x+۲$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵



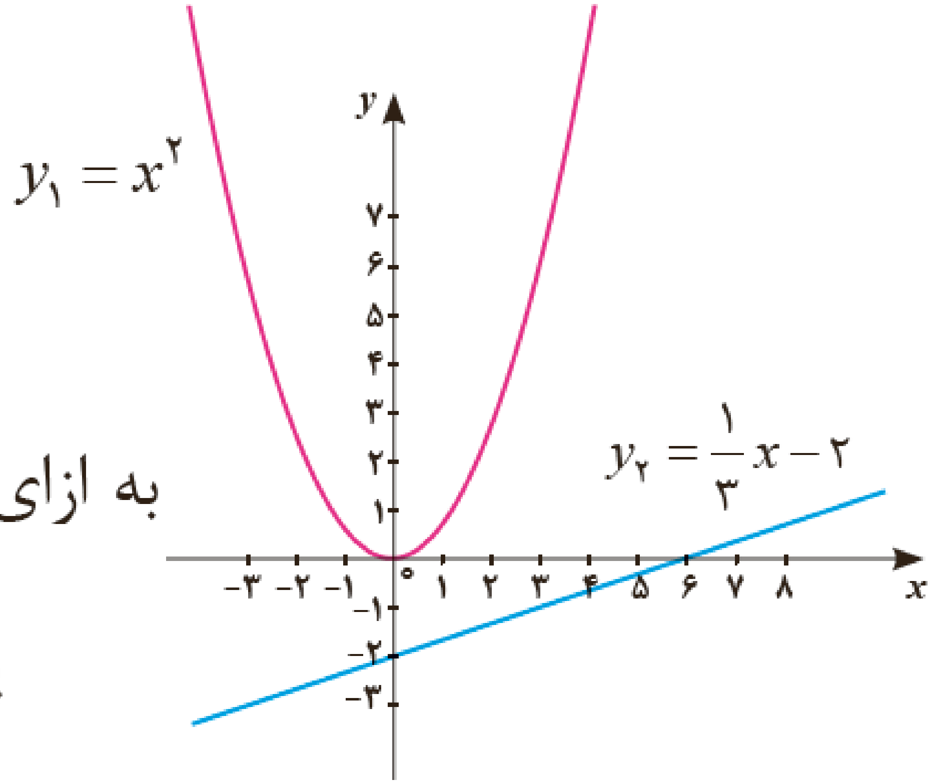
$x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های مسئله هستند.

مثال ۴

معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ - x + ۶ = ۰$ را با روش هندسی حل کنید.

$$۳x^۲ - x + ۶ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = x - ۶ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = x^۲ \\ y_۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲ \end{cases}$$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$\frac{۱}{۳}x - ۲$	-۳	$-\frac{۸}{۳}$	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	$-\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	-۱



به ازای هیچ مقداری از x دو مقدار $x^۲$ و $\frac{۱}{۳}x - ۲$ مساوی نمی‌شوند.

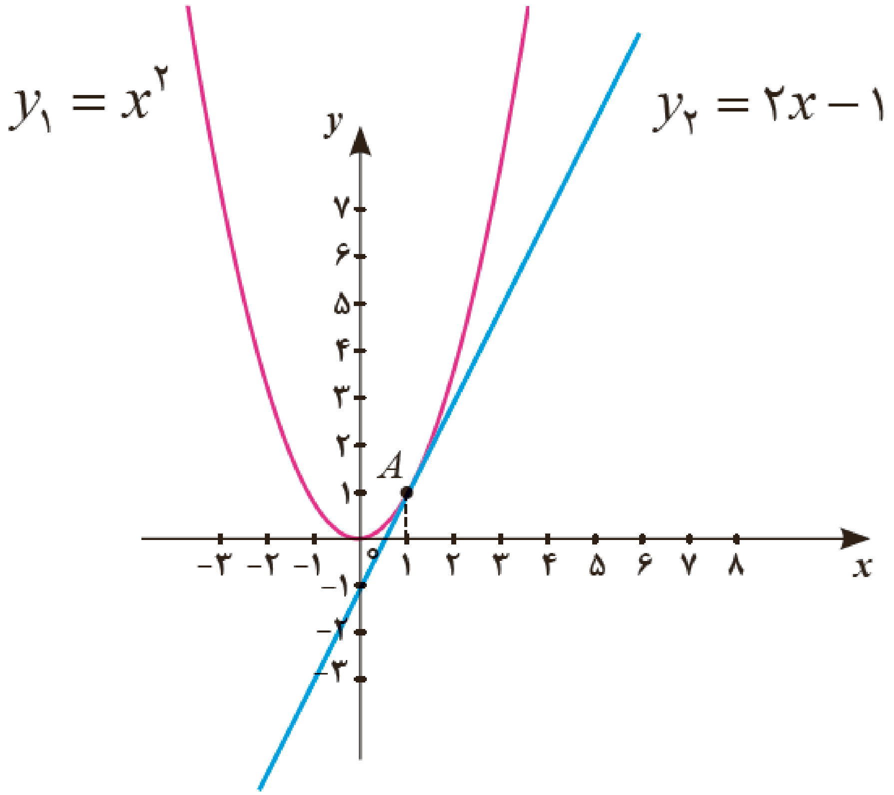
پس معادلهٔ $x^۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲$ جواب ندارد.

مثال ۵

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x+۱=۰$ را با روش هندسی حل کنید.

$$x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow x^۲=۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} y_۱=x^۲ \\ y_۲=۲x-۱ \end{cases}$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$x^۲$	۴	۱	۰	۱	۴
$۲x-۱$	-۵	-۳	-۱	۱	۳

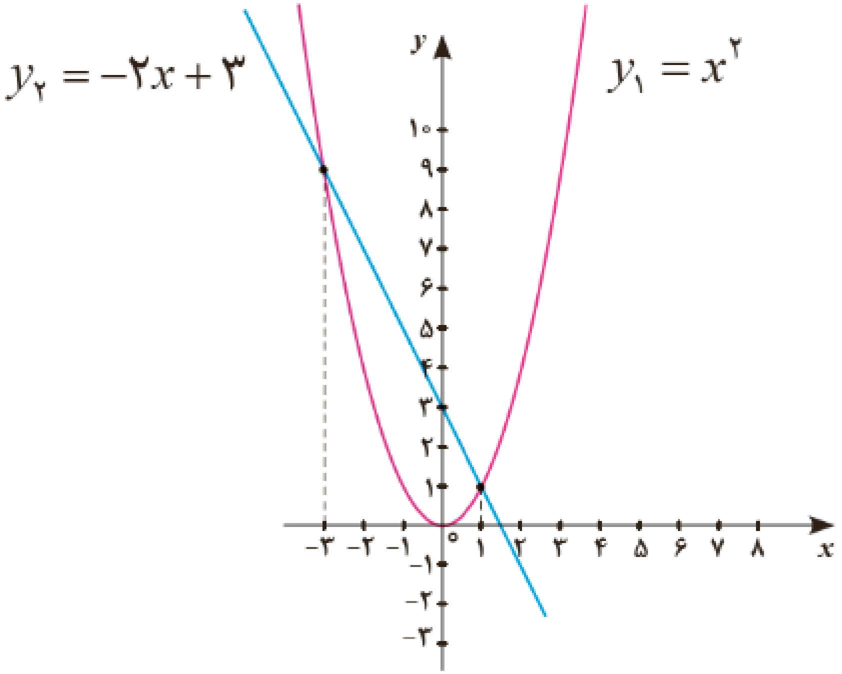


$x=۱$ جواب معادله است.

همان طور که در مثال‌ها دیدید، برخی از معادله‌های درجهٔ دوم، دارای یک جواب (یک نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی)، برخی دیگر دارای ۲ جواب (دو نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) و برخی هم بدون جواب (بدون نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) هستند.

مثال ۶

با روش هندسی نشان دهید عدد ۳ـ یک جواب معادلهٔ $x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$ است. سپس جواب دیگر معادله را پیدا کنید.

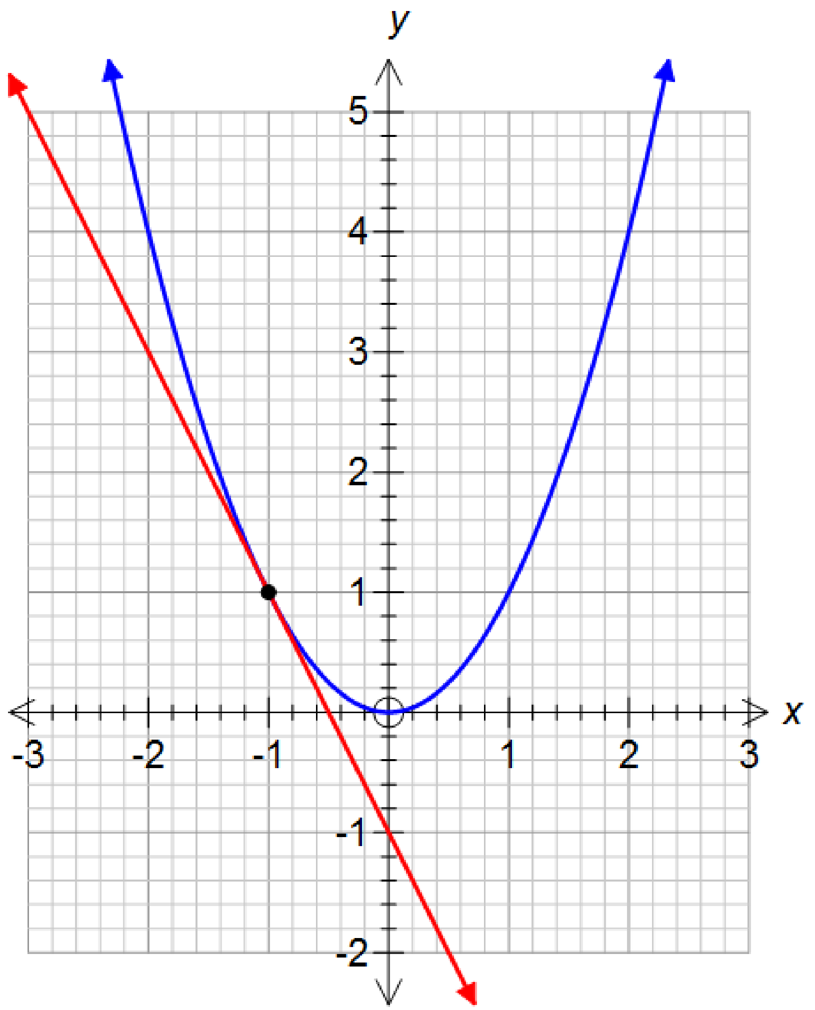


$x = ۱$ جواب دیگر معادله است.

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم‌افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^{۲}+۲x+۱=۰$

$$x^{۲}+۲x+۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=-۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} y_{۱}=x^{۲} \\ y_{۲}=-۲x-۱ \end{cases}$$



جواب معادله:

$$x=-۱$$

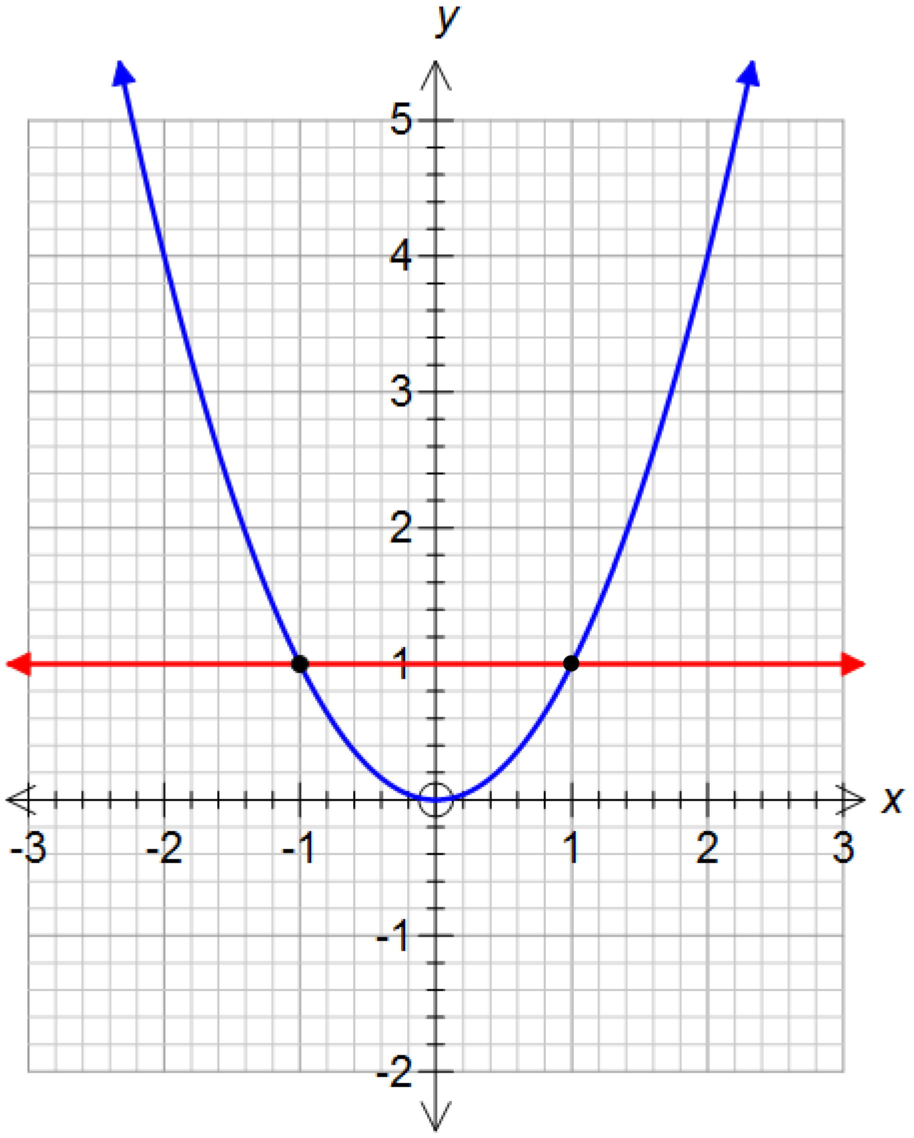
ب) $x^{۲} - ۱ = ۰$

$$x^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} y_{۱} = x^{۲} \\ y_{۲} = ۱ \end{cases}$$

جواب معادله:

$$x = -۱$$

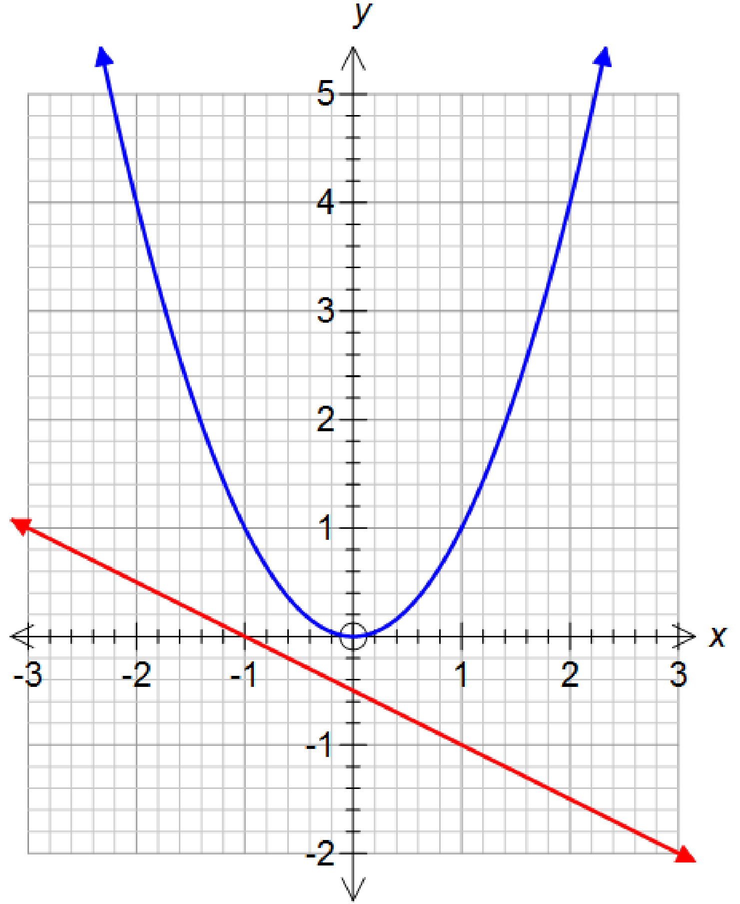
$$x = ۱$$



پ) $۲x^۲ + x + ۱ = ۰$

$$۲x^۲ + x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ = -x - ۱ \Rightarrow x^۲ = -\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = x^۲ \\ y_۲ = -\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

معادله جواب ندارد

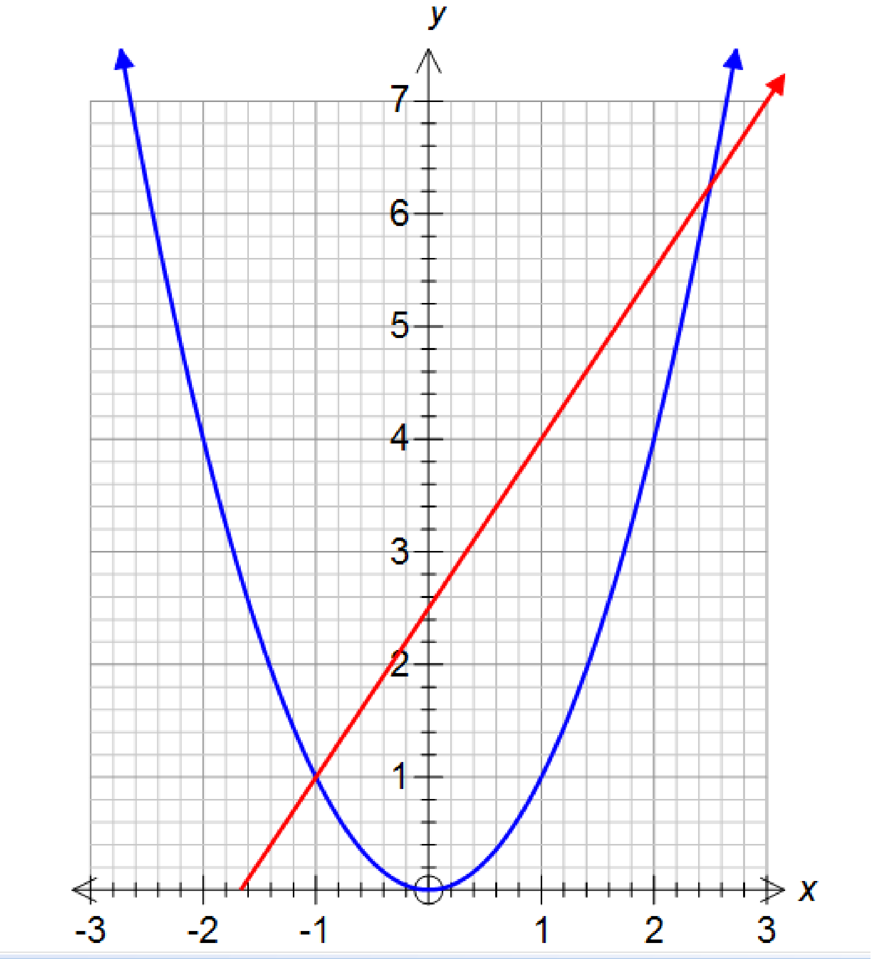


مسئله‌ها

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

الف) $۲x^۲ - ۳x = ۵$

$$x^۲ = \frac{۳}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$



جواب معادله:

$x = -۱$ $\qquad$ $x = ۲/۵$

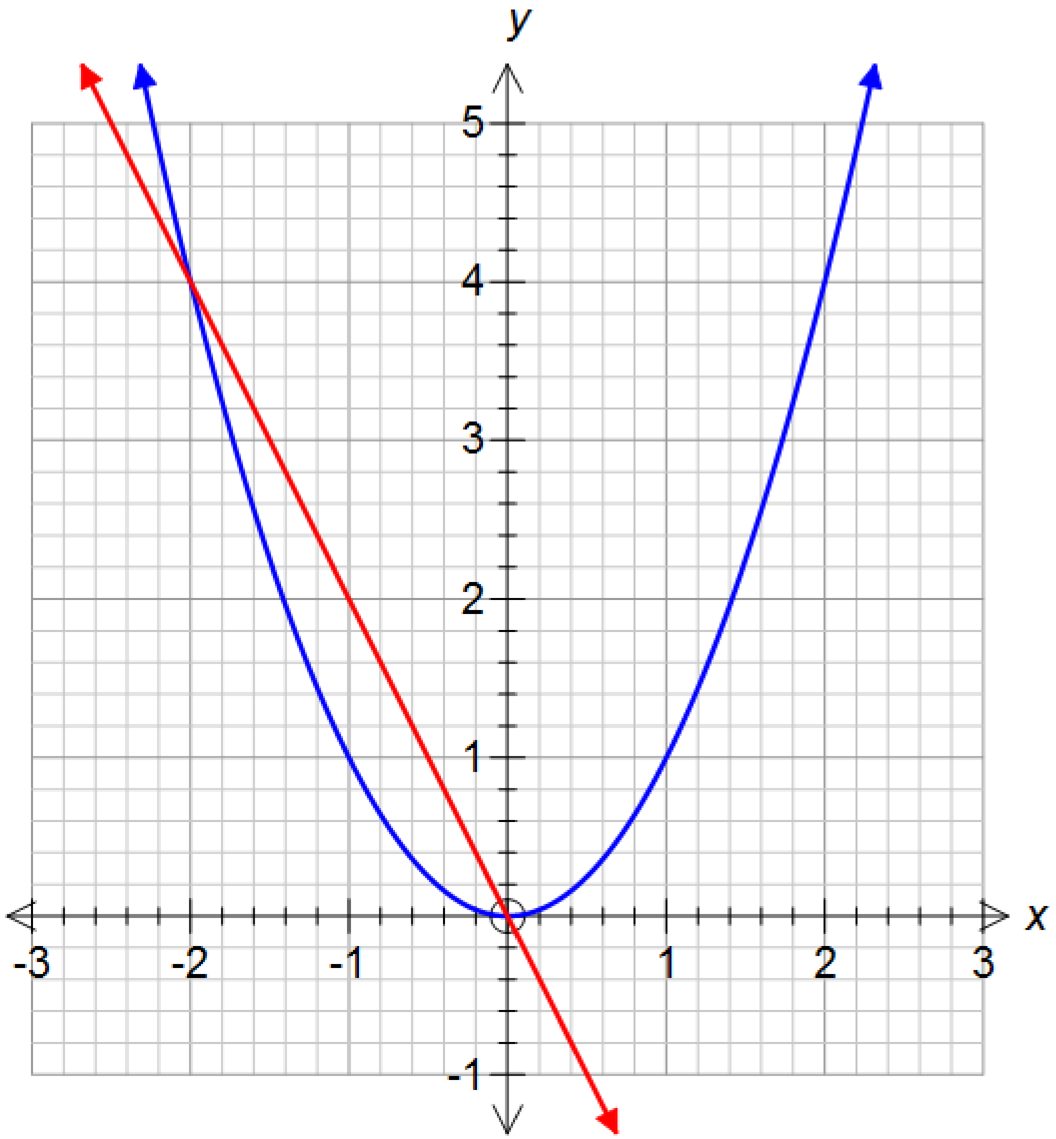
ب) $۴x^۲ + ۸x = ۰$

$$x^۲ = -۲x$$

جواب معادله:

$$x = ۰$$

$$x = -۲$$



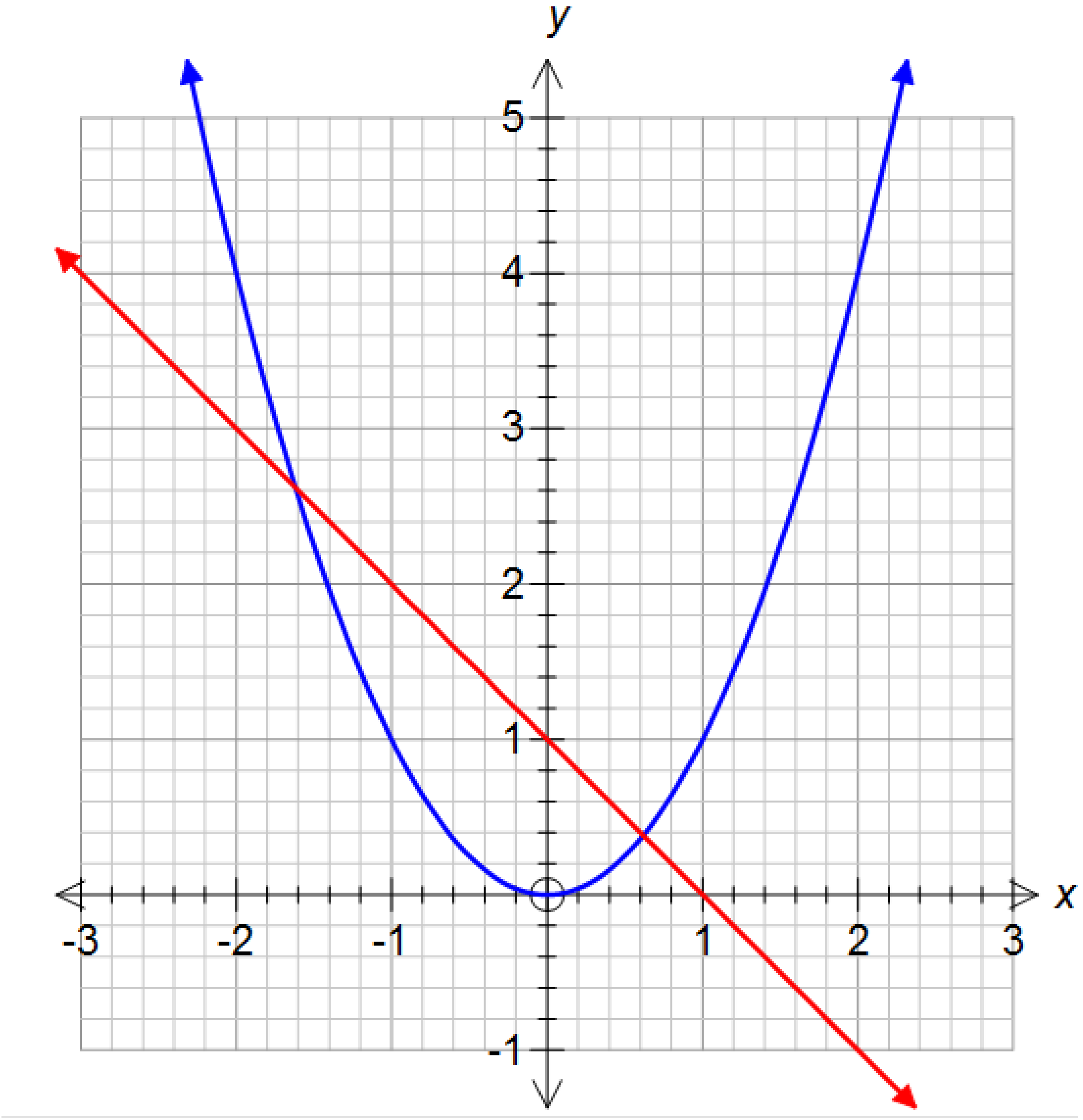
پ) $x^{۲} + x = ۱$

$$x^{۲} = -x + ۱$$

جواب معادله:

$$x = -۱/۶$$

$$x = ۰/۶$$



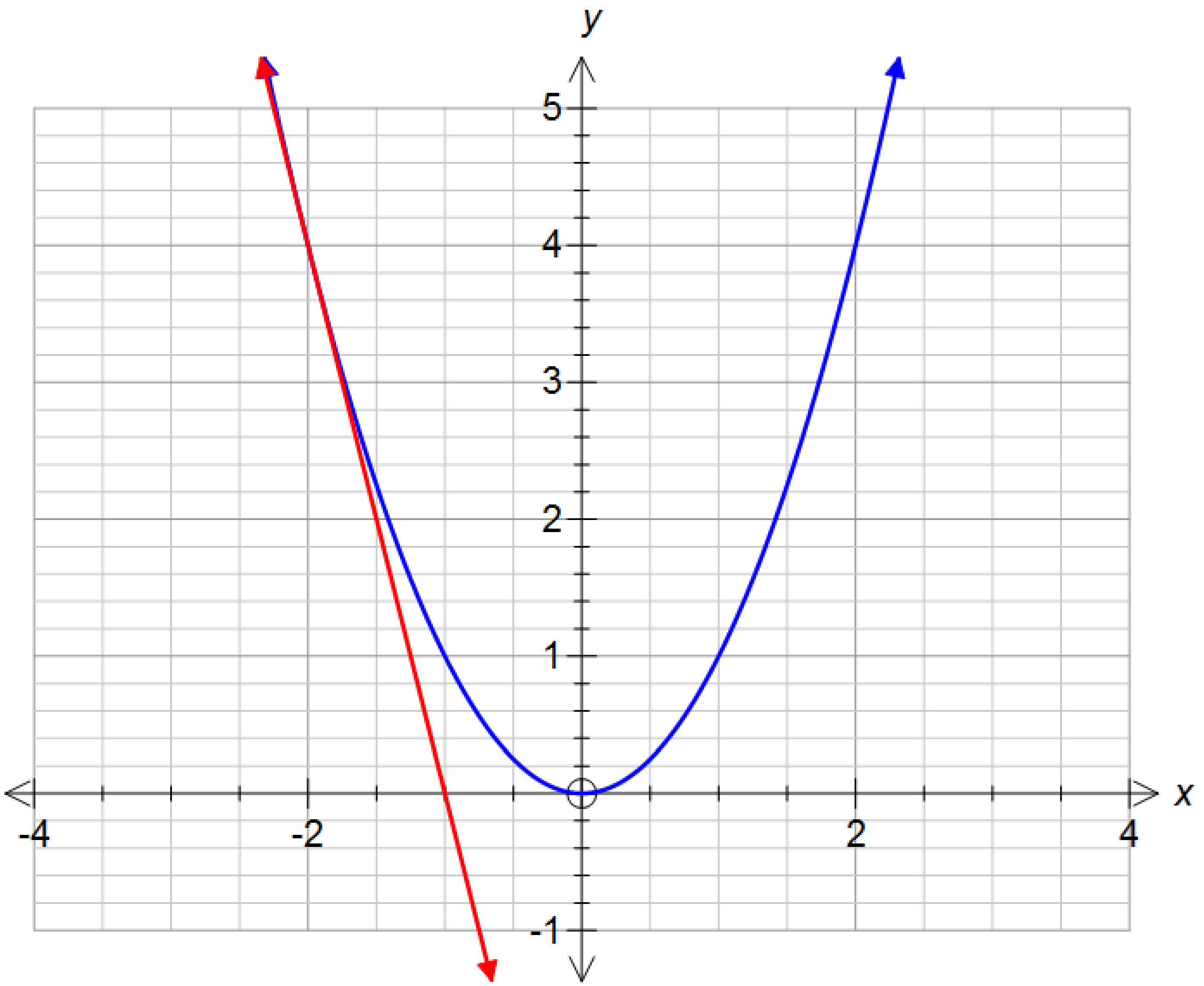
ت) $x^{۲} + ۴x = -۴$

$$x^{۲} = -۴x - ۴$$

$$-۴(-۲) - ۴ = ۸ - ۴ = ۴ = (-۲)^{۲}$$

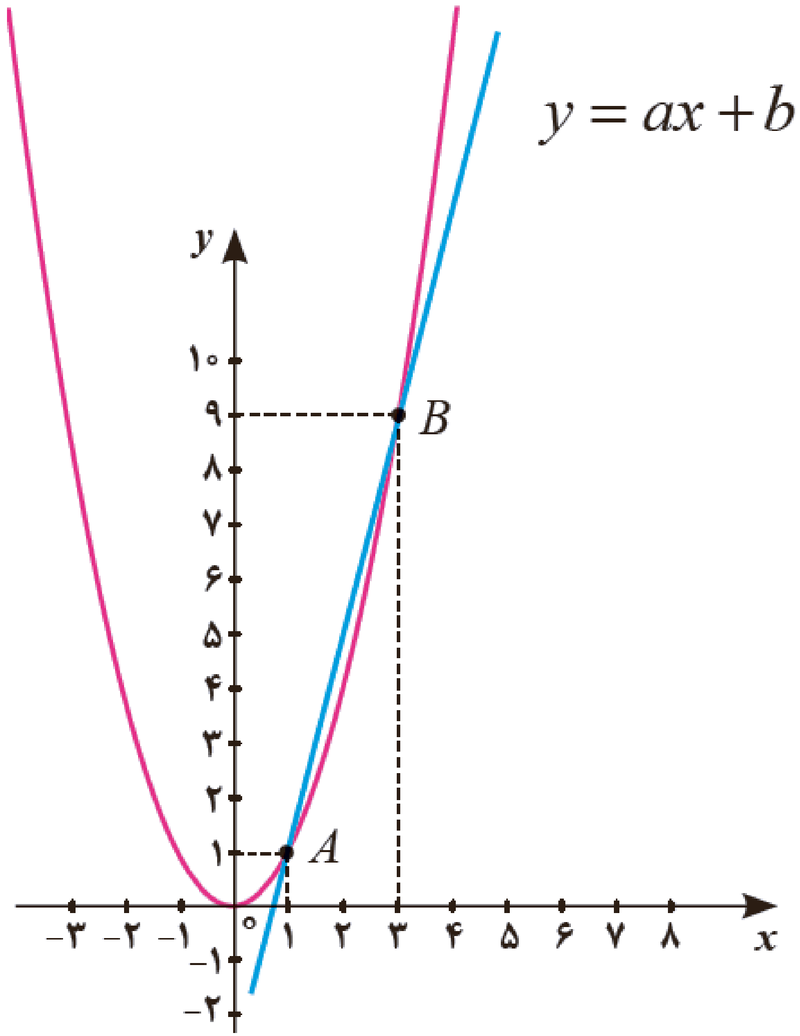
جواب معادله:

$$x = -۲$$



۲) در شکل زیر، خط به معادلهٔ $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشد (**راهنمایی:** یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید، یا ابتدا شیب این خط را بیابید).

$y_۱ = x^۲$

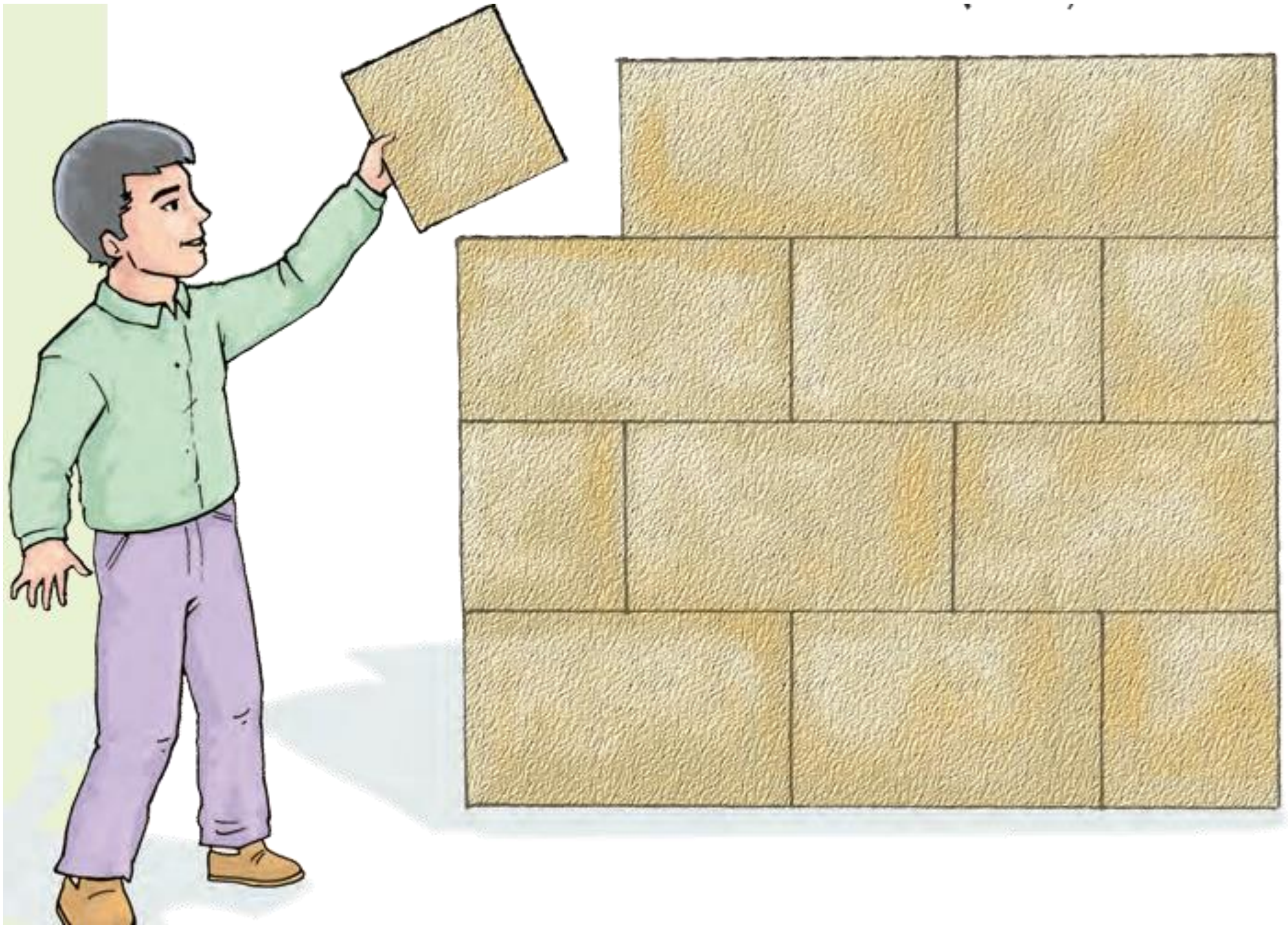


$$\begin{cases} ۹ = ۳a + b \\ ۱ = a + b \end{cases} \Rightarrow ۹ - ۱ = ۳a - a + b - b \Rightarrow ۸ = ۲a \Rightarrow a = ۴$$

$$۱ = ۴ + b \Rightarrow b = ۱ - ۴ = -۳$$

$$x^۲ = ۴x - ۳ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ = ۰$$

روش جبری حل معادله های درجهٔ دوم



با توجه به وجود خطای رسم و اندازه‌گیری در روش هندسی، همواره نمی‌توان به جواب دقیق رسید.

یادآوری
(اتحاد مربع دو جمله‌ای)

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

معادلهٔ $x^۲+۶x-۷=۰$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

$$x^۲+۶x=۷$$

۲) نصف ضریب x در معادلهٔ بالا را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

$$۶\xrightarrow{\div ۲}۳\xrightarrow{\text{توان ۲}}۹$$

۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

$$x^۲+۶x+۹=۱۶$$

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید.

$$(x+۳)^۲=۱۶$$

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به‌دست آورید.

$$\begin{cases}x+۳=۴\\ x+۳=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۴-۳=۱\\ x=-۴-۳=-۷\end{cases}$$

کار در کلاس ۶

معادلهٔ $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

$$x^۲ - ۳x = -۲$$

$$(-۳) \div ۲ = -\frac{۳}{۲} \quad \Rightarrow (-\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$x^۲ - ۳x + \frac{۹}{۴} = -۲ + \frac{۹}{۴} = -\frac{۸}{۴} + \frac{۹}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$(x - \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \qquad \begin{cases} x - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ x - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \\ x = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \end{cases}$$

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید ($a\neq ۰$).

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب $x^۲$ در آن برابر ۱ باشد.

$$ax^۲+bx+c=۰\Rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت (جملهٔ فاقد x) را به طرف دیگر ببرید.

$$x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{b}{۲a}\Rightarrow\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}$$

۴) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a}$$

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ در چه شرایطی جواب دارد؟

چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید $\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}\geq ۰$ و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس $b^۲-۴ac\geq ۰$

این معادله در صورتی جواب دارد که $b^۲-۴ac\geq ۰$

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن $b^۲-۴ac$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{b}{۲a}=+\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \\ x+\frac{b}{۲a}=-\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{b}{۲a}=+\sqrt{\dfrac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}}=\dfrac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \\ x+\dfrac{b}{۲a}=-\sqrt{\dfrac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}}=-\dfrac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{b}{۲a}+\dfrac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \\ x=-\dfrac{b}{۲a}-\dfrac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

$$\boxed{ax^{۲}+bx+c=۰}$$

در صورت مثبت بودن $b^{۲}-۴ac$، که معادلهٔ درجهٔ دوم دارای جواب‌های زیر است:

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

فرمول‌های محاسبه‌ی
جواب معادله درجه دوم

$$\boxed{ax^{۲}+bx+c=۰}$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac$$

$\Delta \geq ۰$ $\Rightarrow$ **معادله درجه دوم دارای جواب است**

اگر $\Delta > ۰$، معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از :

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$، معادله فقط دارای جواب $x=-\frac{b}{۲a}$ است؛

$$\Delta=۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۰ \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}=\frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta < ۰$، معادله جواب ندارد. **زیرا داخل رادیکال نمی‌تواند منفی باشد**

مثال ۷

جواب‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله $a=۱$ و $b=-۳$ و $c=۱$. بنابراین $\Delta = (-۳)^{۲} - (۴)(۱)(۱) = ۵$.

چون $\Delta = ۵ > ۰$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است:

$$x_{۱} = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad x_{۲} = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

کاردرکلاس ۷

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۵x^۲+۲x+۱=۰$

$$a=۵ \quad , \quad b=۲ \quad , \quad c=۱$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲)^۲-(۴)(۵)(۱)=۴-۲۰=-۱۶$$

$\Delta<۰$ ⟹ **معادله جواب ندارد**

ب) $x^{۲}-۶=۰$

$$a=۱ \quad , \quad b=۰ \quad , \quad c=-۶$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۰)^{۲}-(۴)(۱)(-۶)=۲۴ \qquad \Delta>۰$$

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۰)+\sqrt{۲۴}}{۲(۱)}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۴\times ۶}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۲}=\sqrt{۶}$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۰)-\sqrt{۲۴}}{۲(۱)}=\frac{-\sqrt{۲۴}}{۲}=\frac{-\sqrt{۴\times ۶}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۶}}{۲}=-\sqrt{۶}$$

پ) $x^۲ - ۳x = ۰$

$$a = ۱ \quad , \quad b = -۳ \quad , \quad c = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۳)^۲ - (۴)(۱)(۰) = ۹ \qquad \Delta > ۰$$

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۳) + \sqrt{۹}}{۲(۱)} = \frac{+۳ + ۳}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۳) - \sqrt{۹}}{۲(۱)} = \frac{+۳ - ۳}{۲} = \frac{۰}{۲} = ۰$$

مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^{۲}+۵x=۰$

$$a=۲ \quad , \quad b=۵ \quad , \quad c=۰$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۵)^{۲}-(۴)(۲)(۰)=۲۵ \qquad \Delta>۰$$

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)+\sqrt{۲۵}}{۲(۲)}=\frac{-۵+۵}{۴}=\frac{۰}{۴}=۰$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)-\sqrt{۲۵}}{۲(۲)}=\frac{-۵-۵}{۴}=\frac{-۱۰}{۴}=-\frac{۵}{۲}$$

ب) $۳x^{۲}+۱۳x+۳=۰$

$$a=۳ \quad , \quad b=۱۳ \quad , \quad c=۳$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۱۳)^{۲}-(۴)(۳)(۳)=۱۳۳ \qquad \Delta>۰$$

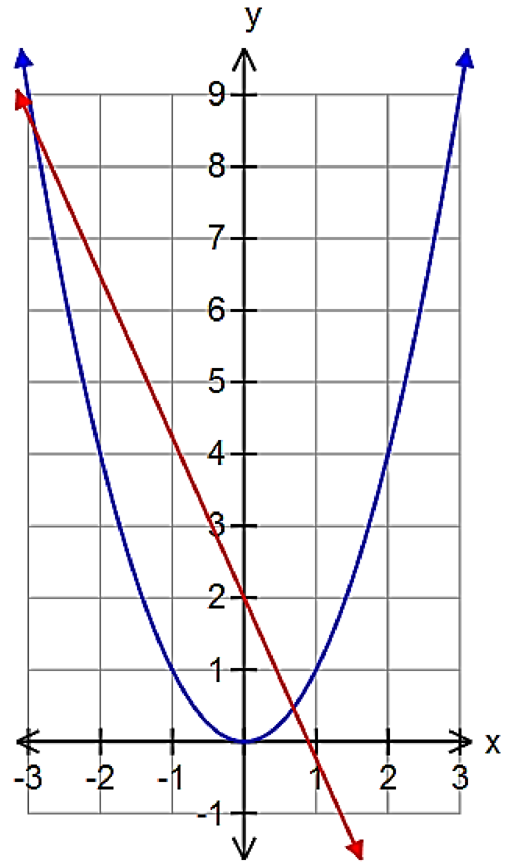
$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۱۳)+\sqrt{۱۳۳}}{۲(۳)}=\frac{-۱۳+\sqrt{۱۳۳}}{۶}$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۱۳)-\sqrt{۱۳۳}}{۲(۳)}=\frac{-۱۳-\sqrt{۱۳۳}}{۶}$$

پ) $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

$$\frac{\sqrt{۲}x\,(x+\sqrt{۵})}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow x\,(x+\sqrt{۵})=\sqrt{\frac{۸}{۲}}=\sqrt{۴}=۲$$

$$x^{۲}=۲-\sqrt{۵}x$$



$x_{۱}\simeq-۲/۹$ $\qquad$ $x_{۲}\simeq۰/۷$

ت) $x^۲ + x + ۲ = ۰$

$a = ۱ \quad , \quad b = ۱ \quad , \quad c = ۲$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱)^۲ - (۴)(۱)(۲) = ۱ - ۸ = -۷$

$\Delta < ۰ \Rightarrow$ **معادله جواب ندارد**

ث) $(۲x-۱)^۲=۵$

$$۴x^۲-۴x+۱=۵ \Rightarrow ۴x^۲-۴x-۴=۰ \Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

$$a=۱ \quad , \quad b=-۱ \quad , \quad c=-۱$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-(۴)(۱)(-۱)=۱+۴=۵ \qquad \Delta>۰$$

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)+\sqrt{۵}}{۲(۱)}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)-\sqrt{۵}}{۲(۱)}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

ج) $(x+۲)^۲ = -۴$

چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۲) اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $5x^2+13x+c=0$ برابر (۳-) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می کند

$$5(-3)^2+13(-3)+c=0 \Rightarrow 45-39+c=0 \Rightarrow c=-6$$

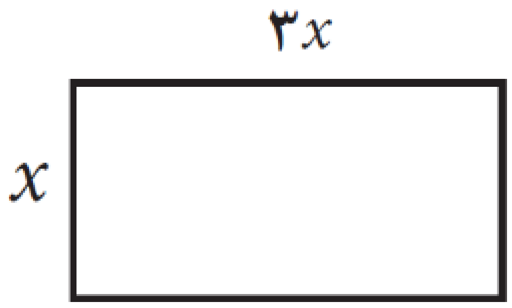
پس معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $5x^2+13x-6=0$ است.

$$\Delta=(13)^2-4(5)(-6)=289$$

$$x_1=\frac{-13+\sqrt{289}}{10} \text{ و } x_2=\frac{-13-\sqrt{289}}{10}$$

$$x_1=\frac{-13+17}{10}=\frac{2}{5} \text{ و } x_2=\frac{-13-17}{10}=-3$$

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟



$$\text{مساحت} = x \times ۳x = ۳x^{۲} = ۳۰۰$$

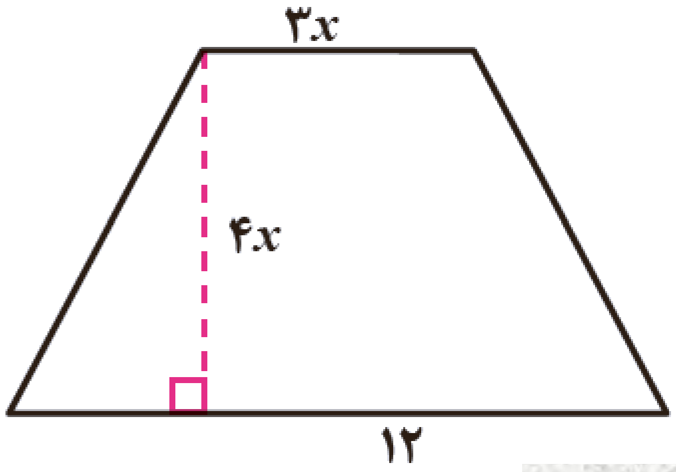
$$۳x^{۲} - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow \quad x^{۲} - ۱۰۰ = ۰$$

$$\Delta = (۰)^{۲} - ۴(۱)(-۱۰۰) = ۴۰۰ > ۰$$

$$x_{۱} = \frac{\sqrt{۴۰۰}}{۲} = ۱۰ \quad \text{و} \quad x_{۲} = \frac{-\sqrt{۴۰۰}}{۲} = -۱۰$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.



$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(۳x+۱۲)(۴x)}{۲}$$

$$\frac{(۳x+۱۲)(۴x)}{۲} = ۱۰۸ \Rightarrow ۱۲x^{۲} + ۴۸x - ۲۱۶ = ۰$$

$$x^{۲} + ۴x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۷۲ = ۸۸$$

$$x_{۱} = \frac{-۴+\sqrt{۸۸}}{۲} \quad \text{و} \quad x_{۲} = \frac{-۴-\sqrt{۸۸}}{۲}$$

$$x_۱ = \frac{-۴ + \sqrt{۸۸}}{۲} \quad \text{و} \quad x_۲ = \frac{-۴ - \sqrt{۸۸}}{۲}$$

$$x_۱ = \frac{-۴ + \sqrt{۴ \times ۲۲}}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-۴ - \sqrt{۴ \times ۲۲}}{۲}$$

$$x_۱ = \frac{-۴ + ۲\sqrt{۲۲}}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-۴ - ۲\sqrt{۲۲}}{۲}$$

$$x_۱ = -۲ + \sqrt{۲۲} \quad , \quad x_۲ = -۲ - \sqrt{۲۲}$$

$x_۲ = -۲ - \sqrt{۲۲}$ و $x_۱ = -۲ + \sqrt{۲۲}$ فقط جواب $x_۱$ قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

عدد کوچک‌تر را با x نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن $x+۱$ خواهد بود.

$$x(x+۱)=۱۳۲ \Rightarrow x^{۲}+x-۱۳۲=۰$$

$$\Delta=(۱)^{۲}-۴(۱)(-۱۳۲)=۵۲۹$$

$$x_{۱}=\frac{-۱+\sqrt{۵۲۹}}{۲}=۱۱ \quad \text{و} \quad x_{۲}=\frac{-۱-\sqrt{۵۲۹}}{۲}=-۱۲$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی۱۲-

و۱۱- هر دو جواب هستند.

۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با توان دوم آن عدد مساوی باشد.

این عدد طبیعی را با n نشان می‌دهیم.

$$۲n + ۳۵ = n^{۲} \Rightarrow n^{۲} - ۲n - ۳۵ = ۰$$

$$\Delta = (-۲)^{۲} - ۴(۱)(-۳۵) = ۴ + ۱۴۰ = ۱۴۴$$

$$n = \frac{۲ + ۱۲}{۲} = ۷ \quad \text{و} \quad n = \frac{۲ - ۱۲}{۲} = -۵$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

۷) نشان دهید $-۱+\sqrt{۲}$ یک جواب معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ است.

می دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب‌بودن را بررسی می‌کنیم.

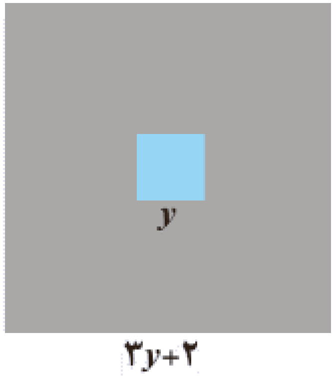
$$(-۱+\sqrt{۲})^{۲}+۲(-۱+\sqrt{۲})-۱\overset{?}{=}۰$$

$$۱+۲-۲\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}-۱\overset{?}{=}۰$$

$$۰=۰$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ هر ضلع مربع‌ها را به‌دست آورید.



مساحت مربع بزرگ‌تر $(۳y+۲)^۲$

مساحت مربع کوچک‌تر $y^۲$

قسمت رنگی بین این دو مربع $(۳y+۲)^۲-y^۲$

$$(۳y+۲)^۲-y^۲=۴۰$$

$$۹y^۲+۴+۱۲y-y^۲-۴۰=۰ \Rightarrow ۸y^۲+۱۲y-۳۶=۰$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$۲y^۲+۳y-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۹+۷۲} y=\frac{-۳\pm۹}{۴} \quad y_۱=-۳ \quad , \quad y_۲=\frac{۳}{۲}$$

غ ق ق

اندازه ضلع مربع کوچک $=y=\frac{۳}{۲}$

اندازه ضلع مربع بزرگ $=۳y+۲=۳\left(\frac{۳}{۲}\right)+۲=\frac{۱۳}{۲}$

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیان‌گذار جبر، کارونا برزینا).

" مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می‌شود."

این مقدار را پیدا کنید.

عدد را x فرض می‌کنیم.

$$\left(\frac{۱}{۳}x+۱\right)\left(\frac{۱}{۴}x+۱\right)=۲۰\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}x^{۲}+\frac{۷}{۱۲}x-۱۹=۰$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می‌کنیم.

$$x^{۲}+۷x-۲۲۸=۰$$

$$x^۲ + ۷x - ۲۲۸ = ۰$$

$$a = ۱ \quad , \quad b = ۷ \quad , \quad c = -۲۲۸$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۷)^۲ - (۴)(۱)(-۲۲۸) = ۹۶۱$$

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۷) + \sqrt{۹۶۱}}{۲(۱)} = \frac{-۷ + ۳۱}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

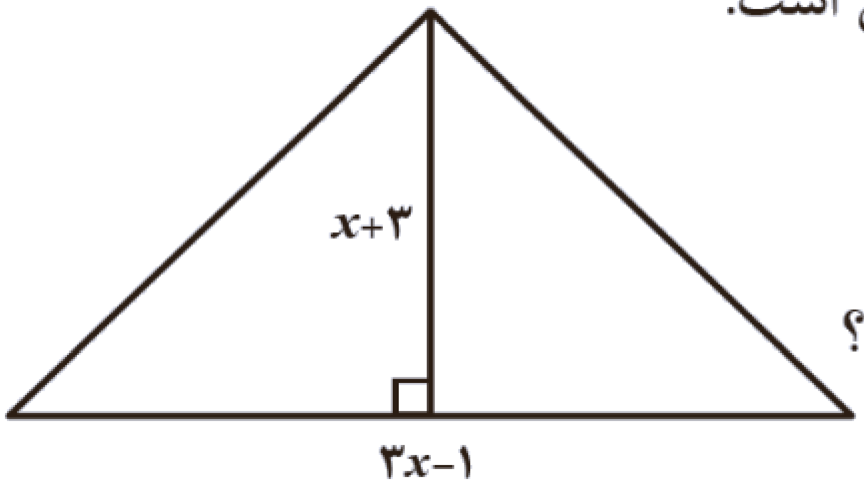
$$x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۷) - \sqrt{۹۶۱}}{۲(۱)} = \frac{-۷ - ۳۱}{۲} = \frac{-۳۸}{۲} = -۱۹$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی‌تواند باشد.

۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌مترمربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

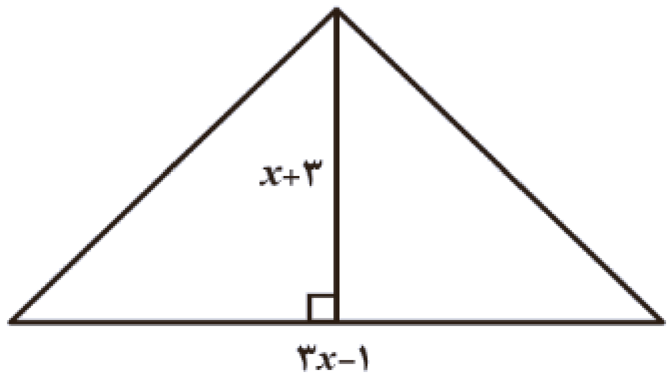


$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲}$$

$$۲۴ = \frac{(۳x-۱)(x+۳)}{۲}$$

$$(۳x-۱)(x+۳) = ۲۴ \times ۲ = ۴۸ \Rightarrow ۳x^{۲} + ۹x - x - ۳ = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲} + ۸x - ۵۱ = ۰$$



$$۳x^{۲} + ۸x - ۵۱ = ۰$$

$$\Delta = (۸)^{۲} - ۴(۳)(-۵۱) = ۶۴ + ۶۱۲ = ۶۷۶$$

$$x_{۱} = \frac{-(۸) + \sqrt{۶۷۶}}{۲(۳)} = \frac{-۸ + ۲۶}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$x_{۲} = \frac{-(۸) - \sqrt{۶۷۶}}{۲(۳)} = \frac{-۸ - ۲۶}{۶} = \frac{-۳۴}{۶}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی‌تواند باشد.

ارتفاع قاعده $= ۳x - ۱ = ۳(۳) - ۱ = ۸$

اندازه ارتفاع $= x + ۳ = ۳ + ۳ = ۶$